

**Seleção e Avaliação de Modelos de Campos de Tensões**  
**Modelos de cantos re – entrantes ou vigas com degraus**

**Arnaldo dos Santos Ribeiro Guimarães**

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em

**Engenharia Civil**

Orientadores:

Professor Doutor João Carlos de Oliveira Fernandes de Almeida

Professor Doutor Miguel Filipe Passos Sérgio Lourenço

**Júri:**

Presidente: Professor Doutor Mário Manuel Paisana dos Santos Lopes

Orientador: Professor Doutor Miguel Filipe Passos Sérgio Lourenço

Vogal: Professor Doutor Jorge Manuel Vinagre Alfaiate

**Dezembro de 2020**



## **Declaração**

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.



## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Professor Doutor João Almeida, por quem criei elevada estima, muita admiração e extremo respeito ao longo do curso, pela confiança depositada em mim, disponibilidade, empenho e sabedoria, que direcionou à realização deste meu trabalho.

Ao mesmo nível e com a mesma estima, endereço também os meus sinceros sentimentos de gratidão ao meu coorientador, Professor Doutor Miguel Lourenço, pelo apoio e ensinamentos que tornaram possível a realização desta dissertação e pela predisposição permanente para reuniões e esclarecimentos de dúvidas.

Menção especial ao Engenheiro Miguel Ferreira, por ter disponibilizado o seu programa EvalS, tendo acedido explicar o seu modo de funcionamento e pelas orientações fornecidas e conducentes aos resultados pretendidos.

A Deus e aos meus pais, manifesto aqui a minha maior e mais profunda gratidão, pois, sem eles, nada disto seria possível! Deles recebo diariamente a força, a energia, a motivação, o amor, assim como muitas outras ferramentas encorajadoras e necessárias à concretização desta longa jornada.

À minha namorada, Bondo Dala, aos meus grandes amigos e colegas, Bunga Mayamputo, Dércio Caupers, José Pedro e Miguel Silva, agradeço-lhes o inestimável apoio ao longo destes cinco anos, não só a nível académico, como também a nível emocional.

Ao meu colega de curso e grande amigo Dércio Caupers, um profundo e sincero reconhecimento pelo valioso e determinante papel que desempenhou na minha trajetória académica.

Agradeço às minhas tias, Maria Sobral e Lucinda Guimarães, o grande suporte concedido, bem como a contribuição e influências positivas que aportaram à minha formação.

Um reconhecimento particular a todos os meus colegas de curso, aos meus estimados professores, aos meus queridos irmãos, amigos e familiares, pelas diversas opiniões, auxílios, esclarecimentos de dúvidas e principalmente pela amizade e companheirismo que demonstraram ao longo desta árdua caminhada.

Agradecimento especial ao MIREMPET de Angola pela participação para que este objetivo fosse alcançado.

Não posso deixar de manifestar também a minha gratidão aos demais colegas e funcionários de todas as áreas do IST, cujos nomes não são aqui citados e que, terão participado de forma mais perceptível uns e, menos perceptível outros, com sua quota parte de cooperação, para que hoje pudesse ter o privilégio de atingir este fim.



## Resumo

Ao longo dos anos, devido às diversas necessidades e desafios estruturais, cada vez mais se realizam estudos para melhor compreensão do comportamento das estruturas. Numa estrutura podem existir regiões denominadas zonas D, zonas de descontinuidade estática ou geométrica, em que a hipótese de Bernoulli não é aplicável. Devido à sua particularidade, têm sido desenvolvidos diversos métodos, modelos, formas de cálculo e simplificações, que permitem assim, não só um melhor dimensionamento destas zonas, como também uma melhor simulação do seu desempenho.

Os modelos de escoras e tirantes e os modelos de campos de tensão, têm sido das principais ferramentas utilizadas nestas situações. No entanto, possuem limitações relativamente à ductilidade e ao desempenho da estrutura em condições de serviço. Assim, deixam em aberto várias questões, relativamente à escolha dos modelos mais adequados a serem usados.

Deste modo, neste trabalho são estudadas as zonas de descontinuidade de uma viga com degrau, simplesmente apoiada e submetida a uma carga concentrada à meio vão. Tendo em conta o encaminhamento da carga no interior da estrutura, consideraram - se diferentes níveis de redistribuição das forças, a partir dos quais desenvolveram -se diversos modelos de escoras e tirantes e respetivas pormenorizações de armaduras. O comportamento em serviço dos diferentes modelos foi avaliado e estudado através de uma análise não – linear de elementos finitos.

Por fim, através desta dissertação, é possível tecer conclusões relativamente ao comportamento destas zonas e obter também informações, parâmetros e referências, que podem ser de grande auxílio no dimensionamento deste tipo de estrutura.

**Palavras – chave:** zonas de descontinuidade, modelos de escoras e tirantes, modelos de campos de tensão, método de elementos finitos, vigas com degrau, análise não – linear.





## Abstract

Over the years, due to the diverse needs and structural challenges, more and more studies are being carried out to better understand the behavior of structures. In a structure, there may be regions called D – regions, zones of static or geometric discontinuity, in which Bernoulli's hypothesis is not applicable. Due to its particularity, several methods, models, calculation forms and simplifications have been developed that allow a better design of these regions, as well as a better simulation of their performance.

The strut and tie models and the stress field models have been one of the main tools used in these situations. However, they have limitations regarding the ductility and the performance of the structure under service conditions. Thus, they leave several questions open regarding the choice of the most suitable models to be used.

Thus, in this work, the D regions of a dapped end beam, simply supported and subjected to a concentrated load in the middle span, are studied. Taking into account the path of the load inside the structure, different levels of force redistribution were considered, from which different strut and tie models and the respective reinforcement were developed. The service behavior of the different models was evaluated and studied through a non-linear analysis of finite elements.

Finally, through this dissertation, it is possible to draw conclusions regarding the behavior of these regions and also obtain information, parameters and references, which can be of great use for the design of this type of structure.

**Key – words:** discontinuity regions, strut-and-tie models, stress field models, finite element method, dapped end beam, non-linear analysis.



# Índice

Índice de figuras .....	xi
Índice de tabelas .....	xiv
Lista de abreviaturas .....	xv
Lista de símbolos .....	xvi
1. Introdução .....	1
1.1 Enquadramento.....	1
1.2 Objetivos .....	2
1.3 Organização.....	3
2. Estado de Arte .....	4
2.1 Modelo de Escoras e Tirantes .....	4
2.1.1 Origem.....	4
2.1.2 Zonas de descontinuidade.....	4
2.1.3 Princípios de modelação .....	5
2.1.4 Dimensionamento de escoras, tirantes e nós .....	6
2.1.4.1 Escoras.....	6
2.1.4.2 Tirantes.....	7
2.1.4.3 Nós.....	8
2.2 Método do caminho de carga .....	11
2.3 Critérios de otimização.....	12
2.3.1 Princípio de Energia Mínima .....	12
2.3.2 Controle da fendilhação .....	13
2.4 Métodos de seleção de modelos .....	13
2.4.1 Geração e otimização automática de modelos de escoras e tirantes através de processos iterativos baseados na rigidez .....	14
2.4.2 Aplicação do método de caminho de carga para a avaliação de modelos de escoras e tirantes em diferentes fases.....	15
2.4.3 CAST (Computer - Aided Strut - and – Tie).....	16
2.4.4. Modelos de Campos de Tensões Adaptativos (MCTA) .....	17
2.5 Modelos básicos de escoras e tirantes.....	18
2.5.1 Vigas com degrau .....	19
2.5.1.1 Análise e resultados .....	19
3. Modelação e análise através de elementos finitos.....	21
3.1 Método dos elementos finitos (MEF).....	21
3.2 Caso de Estudo .....	23
3.3 Análise dos modelos de viga com degrau .....	25

3.3.1 Modelo de Referência ( $k_d = 0.25$ ).....	25
3.3.1.1 Cálculos de dimensionamento .....	25
3.3.1.2 Análise de Resultados.....	30
3.3.2 Modelo 1 ( $k_d = 0.5$ ) .....	36
3.3.2.1 Cálculos de dimensionamento .....	36
3.3.2.2 Análise de Resultados.....	37
3.3.3 Modelo 2 ( $k_d = 0.75$ ).....	41
3.3.3.1 Cálculos de dimensionamento .....	41
3.3.3.2 Análise de Resultados.....	42
3.3.4 Modelo 3 ( $k_d = 1$ ) .....	46
3.3.4.1 Cálculos de dimensionamento .....	46
3.3.4.2 Análise de Resultados.....	47
3.3.5 Modelo 4 ( $k_d = 0$ ) .....	51
3.3.5.1 Cálculos de dimensionamento .....	51
3.3.5.2 Análise de Resultados.....	52
3.4 Avaliação geral do comportamento dos modelos .....	55
4. Conclusão .....	57
4.1 Conclusões gerais .....	57
4.2 Limitações dos modelos .....	58
4.3 Desenvolvimento futuro .....	58
Bibliografia.....	59
Anexos .....	61
A. Modelo de referência ( $k_d = 0.25$ ) .....	61
B. Modelo 1 ( $k_d = 0.5$ ).....	61
C. Modelo 2 ( $k_d = 0.75$ ).....	62
D. Modelo 3 ( $k_d = 1$ ).....	62
E. Modelo 4 ( $k_d = 0$ ) .....	63

# Índice de figuras

Figura 1 – Distribuição de tensões nas Zonas B e D numa viga submetida a duas cargas concentradas (adaptada de José Camara, João Almeida e António Costa, 2018). .....	4
Figura 2 – Zonas D (zonas sombreadas) com distribuição não linear de deformações devido a: a) descontinuidades geométricas; b) descontinuidades estáticas e/ou geométricas (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987). .....	5
Figura 3 – Modelo de escoras e tirantes com uma ‘curva em U’: C – escoras, T - tirantes (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987). .....	5
Figura 4 – Diferentes configurações de campos de tensão de compressão: a) em “leque”; b) em “garrafa”; c) prismática (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987). .....	6
Figura 5 – Nós CCC e CCT em um modelo de escoras e tirantes (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987).....	8
Figura 6 – Nó CCC ( fib Bulletin 56: Model Code, 2010). .....	9
Figura 7 – Nó CCT (EC2 1-1).....	10
Figura 8 – Nó CTT (José Camara, João Almeida e António Costa, 2018). .....	10
Figura 9 – Caminho de carga e modelo de escoras e tirantes correspondente (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987). .....	11
Figura 10 - Modelo de escoras e tirantes com “curva em U” (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987). .....	11
Figura 11 - a) Modelo que respeita as normas; b) Modelo que não respeita o critério de otimização e design (Schlaich, Schaefer & Jennewein, 1987).....	12
Figura 12 - Atrito entre os agregados (A. Muttoni, Schwartz, Thurlimann, 1997).....	13
Figura 13 - a) Modelo Inicial com todas as barras; b) Modelo de escoras e tirantes após a otimização (Kostic,2006) .....	14
Figura 14 - a) Campo de tensão inicial; b) Campo de tensão (resultante da alteração da posição de alguns elementos do campo de tensão inicial) com nós pseudo – hidrostáticos, (Kostic, 2006). .....	15
Figura 15 - a) Trajetórias de tensão da fase não fendilhada num canto com um momento aplicado; b) Caminhos de carga na fase não fendilhada; c) Desvios locais dos caminhos de carga após a fendilhação para um reforço de armadura ortogonal; d) Desvios locais dos caminhos de carga após a fendilhação para um reforço de armaduras ‘em loop’; e) Modelo de escoras e tirantes para a fase fendilhada; f) Modelo de escoras e tirantes para a carga última (Lourenço, 2010). .....	16
Figura 16 - Interface da ferramenta de ‘design’ CAST (Kuchma, Tjhin, 2000). .....	17
Figura 17 – Modelos de campos de tensões adaptativos de uma viga parede para diferentes incrementos de carga (Lourenço, Almeida, 2013) .....	18
Figura 18 - Modelos de referência de escoras e tirantes: a) Viga – parede com carga distribuída; b) Viga – parede com carga suspensa distribuída; c) Vigas com degrau; d) Consola curta com carga concentrada suspensa; .....	18
Figura 19 - Variação das tensões das armaduras: a) Horizontais; b) Inclínadas; c) Verticais (Lourenço, Almeida,2013). .....	19
Figura 20 - Modelação do betão: a) Deformações; b) Círculo de Mohr e deformações principais; c) Direções das deformações principais; d) Superfície de cedência adotada para o estado plano de tensão; e) Resposta tensão – deformação adotada; f) Direções principais assumidas para as tensões (Ruiz, Muttoni, 2007). .....	21
Figura 21 - Elemento CST (constant strain triangle): a) Campo de deslocamentos no elemento; b) Campo de deformações no elemento; c) Campo de tensão assumido para a direção principal i; d) Forças nodais; e) Ângulo $\beta$ em cada nó j (Ruiz, Muttoni, 2007). .....	22
Figura 22 - Modelação do aço: a) Comportamento elasto – plástico do aço com endurecimento por deformação; b) Campo de deslocamentos no elemento tipo barra; c) Forças nodais no elemento tipo barra (Ruiz, Muttoni, 2007).....	22
Figura 23 – Dimensões, caraterísticas e carregamento da Viga com Degrau. ....	23
Figura 24 – Simplificação de simetria da viga e do seu carregamento: a) Viga com degrau; b) Aplicação da simetria na Viga; c) Modelo Simplificado da Viga. ....	23
Figura 25 – Distribuição da carga concentrada de 500kN. ....	24
Figura 26 – Dimensões e caraterísticas dos modelos de escoras e tirantes da viga com degrau. ....	24

Figura 27 – Modelo de escoras e tirantes ( $k_d = 0.25$ ): a) Ortogonal; b) Diagonal.....	25
Figura 28 – Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 0.25$ ).....	30
Figura 29 – Indicação dos tirantes do M.E.T.....	30
Figura 30 – a) Modelo de Viga com Degrau; b) Forças nas armaduras ( $q/q_d = 0.6$ ); c) Força nas armaduras ( $q/q_d = 1.0$ ).....	31
Figura 31 – Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 0.25$ ).....	31
Figura 32 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 0.25$ ).....	32
Figura 33 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $k_d = 0.25$ ).....	32
Figura 34 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 0.25$ ).....	33
Figura 35 – Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.25$ ): a) Em $q/q_d = 0.6$ ; b) Em $q/q_d = 1.0$ .....	34
Figura 36- Tensões atuantes no betão nos incrementos ( $k_d = 0.25$ ): a) $q/q_d = 0.3$ ; b) $q/q_d = 0.6$ , c) $q/q_d = 1.0$ .....	35
Figura 37 - Modelo de escoras e tirantes ( $k_d = 0.5$ ): a) Ortogonal; b) Diagonal.....	36
Figura 38 - Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 0.50$ ).....	37
Figura 39 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 0.5$ ).....	37
Figura 40 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 0.5$ ).....	38
Figura 41 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 0.5$ ).....	38
Figura 42 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $k_d = 0.5$ ).....	39
Figura 43 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.5$ ) em $q/q_d = 0.6$ .....	40
Figura 44 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.5$ ) em $q/q_d = 1.0$ .....	40
Figura 45 - Modelo de escoras e tirantes ( $k_d = 0.75$ ): a) Ortogonal; b) Diagonal.....	41
Figura 46 - Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 0.75$ ).....	42
Figura 47 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 0.75$ ).....	42
Figura 48 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 0.75$ ).....	43
Figura 49 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $k_d = 0.75$ ).....	43
Figura 50 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 0.75$ ).....	44
Figura 51 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.75$ ) em $q/q_d = 0.6$ .....	44
Figura 52 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.75$ ) em $q/q_d = 1.0$ .....	45
Figura 53 - Modelo de escoras e tirantes Ortogonal ( $k_d = 1.0$ ).....	46
Figura 54 - Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 1.0$ ).....	46
Figura 55 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 1$ ).....	47
Figura 56 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 1.0$ ).....	47
Figura 57 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $k_d = 1.0$ ).....	48
Figura 58 - Níveis de extensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 1.0$ )... ..	48
Figura 59 - Tensões atuantes no betão nos incrementos: a) $q/q_d = 0.6$ ; b) $q/q_d = 1.0$ .....	49
Figura 60 - Redução da resistência do betão ( $q/q_d = 1.0$ ): a) Em $k_d = 0.25$ ; b) Em $k_d = 1.0$ .....	50
Figura 61 – Tensões atuantes no betão ( $q/q_d = 1$ ): a) Em $k_d = 0.25$ ; b) Em $k_d = 1.0$ .....	50
Figura 62 - Modelo de escoras e tirantes diagonal ( $k_d = 0$ ).....	51
Figura 63 - Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 0$ ).....	52
Figura 64 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 0$ ).....	52
Figura 65 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 0$ ).....	53

Figura 66 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogononal distribuída ( $k_d = 0$ ). .....	53
Figura 67 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 0$ ). .....	54
Figura 68 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ . .....	54
Figura 69 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogononal : a) horizontal; b) vertical .....	55
Figura 70 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura: c) inclinada; d) distribuída. ....	55
Figura 71 - Intervalos adequados para as duas configurações .....	56
Figura 72 - Redução da resistência do betão( $q/q_d = 1.0$ ): a) $k_d = 0$ ; b) $k_d = 0.25$ ; c) $k_d = 0.50$ ; d) $k_d = 0.75$ ; e) $k_d = 1.0$ .....	56
Figura 73 - Forças nas armaduras ( $k_d = 0.25$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ .....	61
Figura 74 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 0.25$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) $q/q_d = 1.0$ . .....	61
Figura 75 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.25$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ . .....	61
Figura 76 - Forças nas armaduras ( $k_d = 0.5$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ .....	61
Figura 77 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 0.5$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) $q/q_d = 1.0$ . .....	61
Figura 78 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.5$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ . .....	62
Figura 79 - Forças nas armaduras ( $k_d = 0.75$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ .....	62
Figura 80 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 0.75$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) $q/q_d = 1.0$ . .....	62
Figura 81 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.75$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ . .....	62
Figura 82 - Forças nas armaduras ( $k_d = 1.0$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ .....	62
Figura 83 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 1.0$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) $q/q_d = 1.0$ . .....	63
Figura 84 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 1.0$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ . .....	63
Figura 85 - Forças nas armaduras ( $k_d = 0$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ .....	63
Figura 86 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 0$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) $q/q_d = 1.0$ . .....	63
Figura 87 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0$ ): a) em $q/q_d = 0.6$ ; b) em $q/q_d = 1.0$ . .....	63

## Índice de tabelas

Tabela 1- Resumo das forças nas escoras e nos tirantes do modelo ( $k_d = 0.25$ ).....	27
Tabela 2 – Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 0.25$ ). .....	29
Tabela 3 - Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 0.50$ ). .....	36
Tabela 4 - Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 0.75$ ). .....	41
Tabela 5 - Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 1.0$ ). .....	46
Tabela 6 - Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 0$ ). .....	51



# Lista de abreviaturas

CAST – (Computer-Aided Strut-and-Tie), escoras e tirantes assistidos por computador

CST – (Constant Strain Triangle), triângulos de deformação constante

EC2 – Eurocódigo 2

ELU – Estado limite último

MCT – Modelo de campos de tensões

MCTA – Modelo de campos de tensões adaptativos

MEF – Método dos elementos finitos

MET – Modelo de escoras e tirantes

Nó CCC – nó resultante da interceção de três escoras

Nó CCT – nó resultante da interceção de duas escoras e um tirante

Nó CTT – nó resultante da interceção de uma escora e dois tirantes

Zona B – zona em que a hipótese de Bernoulli é aplicável

Zona D – zona em que a distribuição de deformações é não linear, provocada por descontinuidades estáticas ou geométricas

# Lista de símbolos

$A_p$  – área de pré-esforço

$A_s$  – área de armadura de aço

$A_{s, \min}$  – área mínima de armadura

$A_{sw}/s$  – área de armadura transversal por unidade de comprimento

$b$  – largura da zona comprimida em flexão

$b_t$  – largura média da zona tracionada em flexão

$C_i$  – força da escora  $i$

$E_s$  – módulo de elasticidade do aço

$f_{cd}$  – valor de cálculo da resistência do betão à compressão

$f_{ck}$  – valor característico da resistência do betão à compressão

$f_{ctm}$  – valor médio da tensão de rotura à tração do betão

$F_i$  – força na escora ou tirante  $i$

$f_{yd}$  – valor de cálculo da resistência do aço

$f_p$  - tensão resistente de pré – esforço

$h$  – altura correspondente à extensão da zona D

$k_d$  – percentagem da carga que é equilibrada pela armadura ortogonal

$L$  – vão da viga com degrau

$l_i$  – comprimento do elemento  $i$

$M_{sd}$  – valor de cálculo do momento à meio vão

$P$  – valor da carga concentrada

$T_s$  – força do tirante de aço

$T_i$  – força do tirante  $i$

$V_{sd}$  – esforço transversal da viga

$\epsilon_{mi}$  – deformação média do elemento  $i$

$\Theta$  – ângulo de inclinação das escoras da Zona Corrente

$\Theta_1$  – ângulo de inclinação das escoras na Zona D

$\sigma$  – símbolo referente à tensões

$\mu$  – momento fletor reduzido

$\omega$  – percentagem mecânica de armadura

# 1. Introdução

## 1.1 Enquadramento

A compreensão do comportamento de uma estrutura sujeita a determinadas condições é de extrema importância para o dimensionamento estrutural. Com o passar do tempo e com a evolução tecnológica, foram sendo feitos diversos desenvolvimentos relativamente ao desempenho de elementos de betão armado. Como resultados relevantes das pesquisas e estudos efetuados, tem – se, por exemplo, o modelo clássico de treliça, introduzido no final do século XIX por Ritter e Morsch, que até aos dias de hoje ainda tem sido muito utilizado e pode ser considerado como base para os desenvolvimentos posteriores na área dos modelos de dimensionamento para elementos de betão estrutural.

No entanto, este modelo apresentava naturalmente algumas limitações, pois só pode ser aplicado a determinadas zonas de uma estrutura, que podem ser designadas por zonas B (zonas em que a hipótese de Bernoulli é aplicável). Tendo em conta que um dimensionamento adequado tem em consideração as mais variadas regiões de um elemento de betão armado, houve a necessidade de se melhorar e refinar estes modelos.

Os refinamentos realizados por diversos autores nos modelos de treliça, deram origem aos modelos de escoras e tirantes, que além de permitirem a sua aplicação nas já referidas Zonas B, expandem a sua utilização a Zonas D, que são zonas de descontinuidade estática ou geométrica (zonas em que não é aplicável a hipótese de Bernoulli).

Apesar das vantagens obtidas da utilização dos modelos de escoras e tirantes, verifica-se que, para uma determinada situação, pode existir um elevado número de modelos que satisfazem o equilíbrio das forças internas, deixando assim em aberto uma grande margem de escolha de modelos adequados. A este propósito, algumas informações importantes relativamente à utilização e critérios de construção de modelos de escoras e tirantes podem ser encontrados em (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987) e em (Schlaich, Schafer, 1991) – como princípio geral, os autores sugerem a orientação do modelo de acordo com a distribuição elástica de tensões, e a sua otimização de acordo com princípios de energia, como soluções possíveis para o estabelecimento de modelos adequados.

Em síntese, a seleção de um determinado modelo de dimensionamento tem não só que garantir o cumprimento das condições de equilíbrio e a disponibilidade do nível de ductilidade necessário, mas também a garantia de um adequado comportamento em serviço, sendo, em particular, este último aspeto abordado nesta dissertação.

## 1.2 Objetivos

As vigas com degrau, objeto de estudo deste trabalho, constituem zonas de importante descontinuidade, pelo que se torna necessário um estudo cauteloso do seu comportamento nas diferentes fases de carregamento.

Devido à necessidade de superar as limitações referidas e à complexidade na escolha de modelos de escoras e tirantes adequados, foram desenvolvidos ao longo dos anos, diversos métodos de seleção automática de modelos, baseados nos mais variados critérios.

Deste modo, o principal objetivo desta dissertação consiste em avaliar o comportamento em serviço das vigas com degrau/cantos reentrantes sujeitos a uma carga concentrada a meio vão, de forma a estabelecer critérios para a seleção de modelos de escoras e tirantes que ajudem a reduzir o grau de incerteza do projetista no dimensionamento deste tipo de estruturas.

Como apresentado nos capítulos seguintes, o modelo de escoras e tirantes destas vigas, consiste essencialmente na combinação de duas configurações (com armadura ortogonal e inclinada); o modelo de referência, baseado nas trajetórias elásticas, sugere que cerca de 25% da carga deve ser equilibrada pelas armaduras ortogonais junto ao “degrau” e os restantes 75% pela armadura de reforço inclinada.

Nesta dissertação a avaliação deste tipo de modelos, foi realizada estabelecendo distribuições das forças internas distintas das sugeridas pelos modelos de referência, obtendo a respetiva pormenorização de armaduras e analisando a resposta do sistema ao carregamento indicado. A simulação e a análise dos diferentes modelos foram efetuadas com recurso a um programa de elementos finitos (EvalS), da autoria de Miguel Ferreira (2017), com auxílio de programas de folhas de cálculo desenvolvidas para a interpretação e representação gráfica dos resultados.

## 1.3 Organização

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. No primeiro capítulo é feita a introdução ao trabalho, em que se apresenta um enquadramento do tema, onde são referidas as diferentes zonas existentes numa estrutura e as evoluções graduais ocorridas ao longo do desenvolvimento de métodos de dimensionamento das mesmas. No referido capítulo enumeram-se ainda os objetivos da dissertação e procede -se a uma descrição da sua organização.

No segundo capítulo, apresenta - se uma descrição mais detalhada das características das zonas de descontinuidade, introduzem – se diversos exemplos, princípios para a sua modelação, bem como os códigos e as regras necessárias para o bom dimensionamento dos principais elementos destes modelos. De seguida, são referidos alguns métodos de otimização e de seleção automática de modelos. Por fim, são apresentadas as conclusões e resultados obtidos por diferentes autores, relativamente ao comportamento das vigas com degrau.

O terceiro capítulo inicia – se com uma descrição do método de elementos finitos e posteriormente são mostrados os dados do problema em estudo, os diferentes modelos de escoras e tirantes analisados, a sua pormenorização, bem como a análise e discussão dos resultados obtidos para cada modelo.

Ao quarto e último capítulo, foram destinadas as diferentes conclusões resultantes da realização deste trabalho, as limitações encontradas e as sugestões de desenvolvimento futuro.

## 2. Estado de Arte

### 2.1 Modelo de Escoras e Tirantes

#### 2.1.1 Origem

O modelo de escoras e tirantes teve a sua origem no final do século XIX, mais especificamente em 1899, quando Wilhelm Ritter apresentou o modelo de treliça que posteriormente foi refinado por Emil Morsch em 1912. Este modelo demonstrava que os estribos trabalhavam a tração e permitia considerar o seu contributo para a resistência ao esforço transversal em vigas de betão armado.

Mais tarde, iniciaram – se as tentativas para expandir a utilização destes modelos para as mais variadas situações. Com o passar dos anos o modelo original sofreu diversas melhorias e consequentemente novas aplicações, sendo uma delas a sua utilização no dimensionamento de zonas de descontinuidade em que não são aplicáveis os métodos seccionais de dimensionamento.

#### 2.1.2 Zonas de descontinuidade

Numa estrutura, geralmente, existem duas zonas com características distintas, Zonas B e Zonas D. As Zonas B são regiões em que existe uma distribuição linear das deformações, em que é aplicável a hipótese de Bernoulli (secções planas permanecem planas após a deformação). As Zonas D também designadas por zonas de descontinuidade, são regiões em que a distribuição das deformações é não – linear, pelo que não é aplicável a hipótese de Bernoulli. A Figura 1 mostra as diferentes distribuições das tensões para cada uma destas zonas.

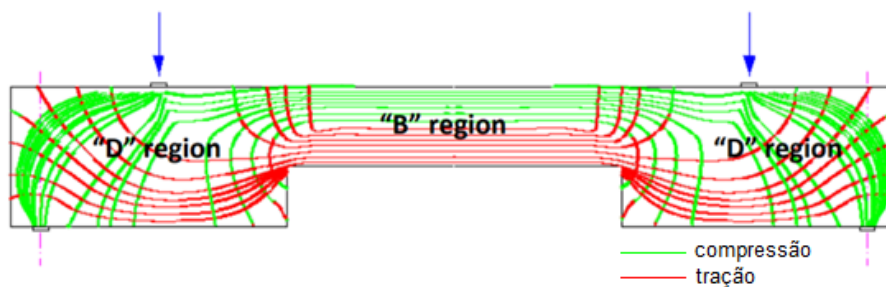


Figura 1 – Distribuição de tensões nas Zonas B e D numa viga submetida a duas cargas concentradas (adaptada de José Camara, João Almeida e António Costa, 2018).

As zonas D surgem devido a descontinuidades geométricas (cantos, reentrâncias, saliências, aberturas) ou devido a descontinuidades estáticas (como cargas concentradas).

Para a aplicação dos modelos de escoras e tirantes a delimitação das fronteiras das zonas de descontinuidade pode ser feita de forma qualitativa, considerando uma distância "h" (distância igual à profundidade da Zona B adjacente), a partir da descontinuidade geométrica ou estática, fazendo assim a divisão da estrutura em zonas B e zonas D, como se pode observar na Figura 2. Este critério é baseado no princípio de Saint-Venant.

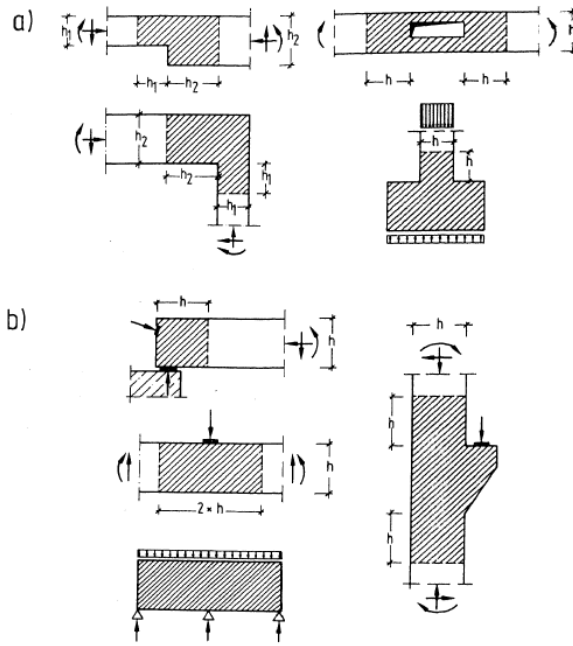


Figura 2 – Zonas D (zonas sombreadas) com distribuição não linear de deformações devido a: a) descontinuidades geométricas; b) descontinuidades estáticas e/ou geométricas (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987).

### 2.1.3 Princípios de modelação

O modelo de escoras e tirantes é composto por: escoras que representam campos de tensão à compressão; tirantes que representam a armadura das zonas de tração; e os nós de conexão que são zonas de desvio de tensões. Na figura a seguir [Figura 3] mostra – se como exemplo um modelo de escoras e tirantes.

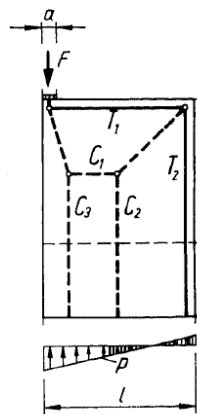


Figura 3 – Modelo de escoras e tirantes com uma ‘curva em U’: C – escoras, T - tirantes (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987).

Como já foi mencionado, um dos primeiros passos a dar para a construção deste modelo é a identificação das fronteiras das diferentes zonas, dividindo a estrutura em Zonas B e Zonas D, que é de elevada importância para facilitar a análise da estrutura.



As regiões B podem ser analisadas de acordo com os esforços (M, N, V) nas secções, pois, o modelo de treliça está perfeitamente definido. Pelo contrário, nas zonas D o modelo de escoras e tirantes tem de ser desenvolvido.

Através de uma análise global, as forças aplicadas nas fronteiras das zonas de descontinuidade, que podem ser forças externas ou forças internas provenientes de zonas adjacentes, podem ser conhecidas.

De seguida, para elaborar o modelo de escoras e tirantes pode ser utilizado o método do caminho de carga, sendo as escoras e tirantes calculados com base em condições de equilíbrio. Finalmente, a pormenorização das armaduras deverá ser adequada às forças e localização dos tirantes, devendo-se colocar as quantidades de armaduras mínimas nas zonas onde não foram especificados tirantes. Obviamente que é sempre possível refinar o modelo, com modelos secundários ou complementares, de modo a estimar com maior rigor eventuais trações que possam ocorrer noutras zonas da região em estudo.

## 2.1.4 Dimensionamento de escoras, tirantes e nós

### 2.1.4.1 Escoras

Como já foi referido, as escoras resultam de campos de tensão à compressão, geralmente são representadas por linhas retas e as curvaturas ou desvios das forças estão concentrados nos nós, porém, claramente isto é uma idealização da realidade.

De modo a abranger os diferentes casos de campos de compressão, existem três configurações que são possíveis e que são conhecidas por:

- Configuração em “leque”;
- Configuração em “garrafa”;
- Configuração prismática ou com campos de tensão paralelos;

As configurações enunciadas são representadas na figura a seguir [Figura 4].

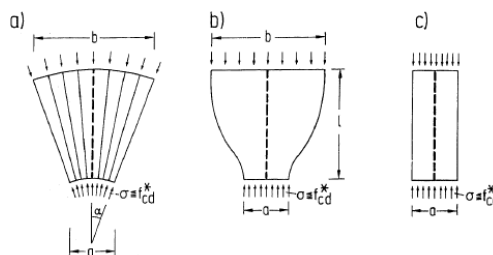


Figura 4 – Diferentes configurações de campos de tensão de compressão: a) em “leque”; b) em “garrafa”; c) prismática (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987).

A resistência das escoras depende da resistência do betão, que poderá ser condicionada tanto pela fendilhação, ou pelas extensões transversais de tração, como pelo grau de confinamento da zona. Como é sabido, o confinamento aumenta a resistência à compressão do betão, enquanto que as tensões transversais de tração reduzem o valor de resistência uniaxial. Este efeito de redução da resistência é inversamente proporcional à extensão transversal e pode ser estimada pela conhecida equação de Vecchio e Collins (1986), onde  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_c$  são a extensão transversal de tração e a extensão de compressão do betão no pico da sua resistência.

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{0.8 + 0.34 \varepsilon_1 / -\varepsilon_c} \geq 1 \quad (1)$$

De acordo com o EC2 no capítulo 6.5.2 a resistência à compressão pode ser calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd} \quad (2)$$

No caso das compressões atravessarem zonas fendilhadas, o EC2 por simplificação da expressão do Vecchio e Collins (1986), limita a tensão máxima à Eq. 3.

$$\sigma_{Rd,max} = 0.6v'f_{cd} \quad (3)$$

$$v' = 1 - f_{ck}/250 \quad (4)$$

Onde:

$f_{cd}$  – valor de cálculo da resistência do betão à compressão;

$f_{ck}$  – valor característico da resistência do betão à compressão;

#### 2.1.4.2 Tirantes

Para resistir às forças de tração, são usualmente utilizadas armaduras que deverão se distribuir ao longo do comprimento do tirante e fazer a sua correta amarração nos nós, sendo necessário também que o eixo das mesmas esteja coincidente com o eixo dos tirantes. Assim, no dimensionamento dos tirantes, tem de se garantir que a força de tração do tirante deverá ser inferior a força resistente, proveniente da área de aço ( $A_s$ ) ou área de pré-esforço ( $A_p$ ) multiplicadas pelas suas tensões de cedência  $f_{sy}$  e  $f_{py}$  respetivamente.

$$T_s \leq A_s f_{sy} + A_p \Delta f_{py} \quad (5)$$

### 2.1.4.3 Nós

Os nós são os pontos de interseção de escoras e tirantes, onde existe uma mudança de direção das forças que nele concorrem.

O encontro de campos de compressão distribuídos ou de armaduras de reforço distribuídas, que usualmente ocorre no interior da região em estudo, faz com que estes desvios ocorram ao longo de uma determinada largura, dando origem aos nós contínuos ou distribuídos. Estes nós não são críticos pois as tensões são, usualmente, baixas, pelo que é suficiente garantir um adequado comprimento de amarração das armaduras.

Por outro lado, quando a interseção resulta de escoras ou tirantes que representem campos de tensão concentrados, originam tensões elevadas no betão que devem ser devidamente analisadas. Estes nós têm o nome de nós singulares ou concentrados e por gerarem tensões altas em zonas localizadas devem ser devidamente dimensionados. Os nós singulares ou concentrados são maioritariamente originados por cargas concentradas, reações nos apoios, descontinuidades geométricas, entre outros. Na Figura 5 pode – se observar um modelo de escoras e tirantes e os seus respetivos nós.

Existem três tipos de nós, dependendo do tipo de combinação de escoras e tirantes que nele ocorre:

- Nós CCC: consiste na interceção de três escoras;
- Nós CCT: consiste na interceção de duas escoras e um tirante;
- Nós CTT: consiste na interceção de uma escora e dois tirantes;

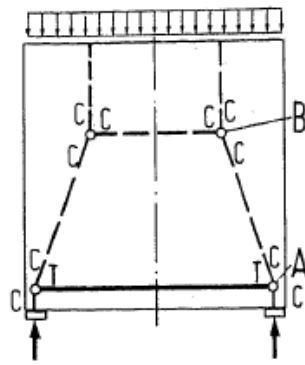


Figura 5 – Nós CCC e CCT em um modelo de escoras e tirantes (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987).

## Nós CCC

Para este tipo de nós é possível fazer com que as suas fronteiras sejam planas e perpendiculares às resultantes dos campos de tensão, provocando um estado plano de tensão onde as tensões nas superfícies e no interior do nó são iguais e constantes em todas as direções – nós hidrostáticos. Num caso geral, pode não ocorrer esta situação e então a máxima tensão de compressão que atua no nó deve ser inferior à tensão máxima resistente do betão, que de acordo com o EC2 parte 1-1, é dada por:

$$\sigma_{Rd,max} = v' f_{cd} \quad (6)$$

Os valores desta tensão podem ser aumentados em 10% caso se verifique pelo menos uma das seguintes condições:

- Garantia de compressão triaxial;
- Todos os ângulos entre escoras e tirantes serem  $\geq 55^\circ$ ;
- As tensões nos apoios ou provocadas por cargas pontuais devem ser uniformes e o nó deve estar confinado por armaduras transversais;
- A armadura de reforço distribuída em múltiplas camadas;
- O nó fiavelmente confinado por meio de disposições de apoio ou atrito;

Estes nós encontram-se representados na Figura 6.

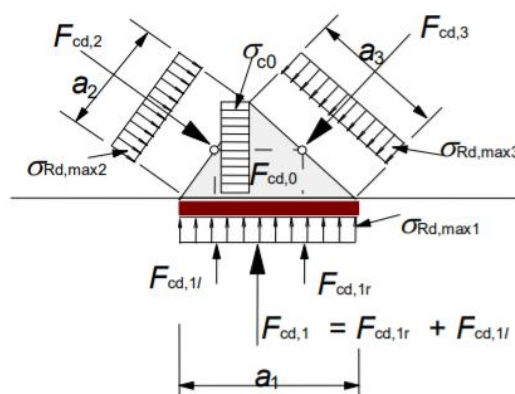


Figura 6 – Nó CCC ( fib Bulletin 56: Model Code, 2010).

## Nós CCT

Neste tipo de nós deve-se verificar se as tensões de compressão no betão estão dentro dos limites estabelecidos e garantir uma adequada amarração das armaduras nos nós. A configuração destes nós é exibida na Figura 7.

De acordo com o EC2 parte 1-1, a resistência máxima de tensão do betão a ser considerada para a verificação de segurança das regiões sujeitas à compressão é dada por:

$$\sigma_{Rd,max} = 0.85v'f_{cd} \quad (7)$$

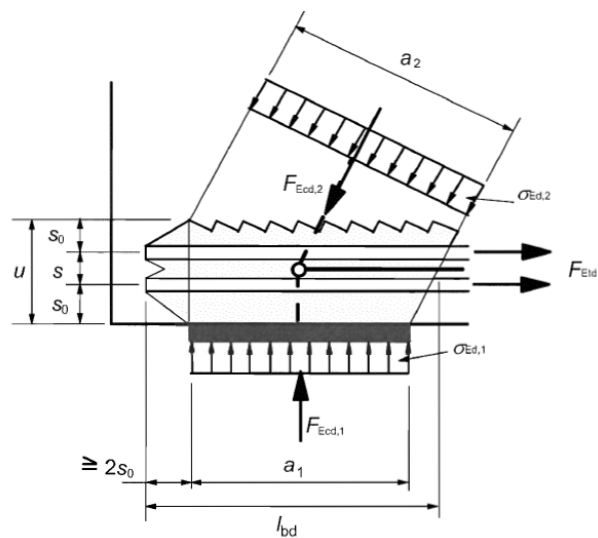


Figura 7 – Nó CCT (EC2 1-1).

## Nós CTT

As verificações a serem feitas neste tipo de nós são semelhantes às dos nós CCT, com a diferença no valor da tensão máxima resistente do betão, que de acordo com o EC2 parte 1-1, é calculada da seguinte forma:

$$\sigma_{Rd,max} = 0.75v'f_{cd} \quad (8)$$

Estes nós encontram-se representados na Figura 8.

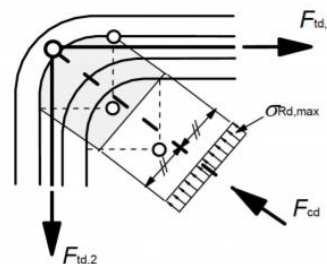


Figura 8 – Nó CTT (José Camara, João Almeida e António Costa, 2018).

## 2.2 Método do caminho de carga

O caminho de carga pode ser idealizado estabelecendo as trajetórias que encaminham as forças desde o seu local de aplicação até ao apoio.

Para a aplicação deste método é necessário conhecer-se, em primeiro lugar, as forças nas fronteiras do elemento em estudo e estabelecer o equilíbrio externo das mesmas, sejam estas cargas ou reações nos apoios.

De seguida, o diagrama de tensões é subdividido de maneira que as forças resultantes de um lado da estrutura sejam equilibradas por outras do lado oposto.

Os caminhos de carga têm o seu início e o seu fim no centro de gravidade dos diagramas de tensão correspondentes e, tendem a seguir o menor trajeto possível.

Os desvios de tensões provocam trações ou compressões numa direção diferente da direção da carga e devido a isso devem ser consideradas escoras e tirantes para garantir o equilíbrio entre os nós. Este processo pode ser visualizado na figura a seguir [Figura 9].

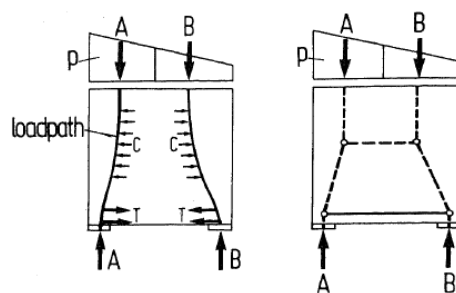


Figura 9 – Caminho de carga e modelo de escoras e tirantes correspondente (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987).

Existem situações em que as resultantes “entram e saem” da região fazendo uma “curva em U”. Estas resultantes são auto-equilibradas devido ao facto de terem igual magnitude, mas sentidos opostos, como é demonstrado na figura 10.

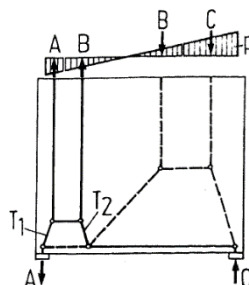


Figura 10 - Modelo de escoras e tirantes com “curva em U” (Schlaich, Schafer, & Jennewein, 1987).

## 2.3 Critérios de otimização

### 2.3.1 Princípio de Energia Mínima

Existe uma certa liberdade na criação de modelos, pois, não existe uma única e ótima solução. Este facto desperta diversas dúvidas em relação à escolha de um modelo entre as diferentes possibilidades. Porém, pode-se ter em consideração que as forças procuram seguir caminhos que gerem menos forças internas e deformações. Tendo em conta que os tirantes são muito mais deformáveis que as escoras, geralmente a contribuição destas pode ser desprezada, o modelo mais adequado será aquele que necessite de uma menor quantidade de armadura, i.e., que tenha menor comprimento de tirantes. Este critério de otimização pode ser formulado da seguinte forma (Schlaich, Schaefer & Jennewein, 1987):

$$\sum F_i l_i \varepsilon_{mi} = \text{Mínimo} \quad (9)$$

Onde:

$F_i$  – força na escora ou tirante  $i$ ;

$l_i$  – comprimento do elemento  $i$ ;

$\varepsilon_{mi}$  – deformação média do elemento  $i$ ;

Esta equação deriva do princípio de energia mínima de deformação. Na figura a seguir [Figura 11] são representados dois modelos, o modelo a) está de acordo com o critério referido, enquanto que o modelo b) apresenta maior comprimento de tirantes e um caminho de carga que exige mais energia (que além de não ir de encontro com o princípio de energia mínima, não tem uma solução adequada do ponto de vista prático).

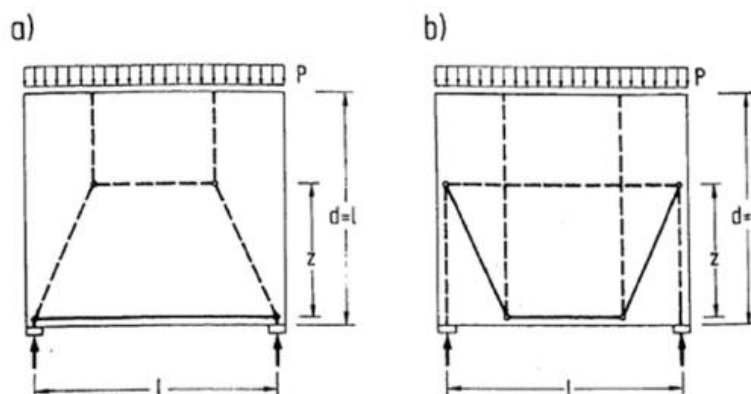


Figura 11 - a) Modelo que respeita as normas; b) Modelo que não respeita o critério de otimização e design (Schlaich, Schaefer & Jennewein, 1987).

### 2.3.2 Controle da fendilhação

Além do aparecimento de fendas provocar uma perda de resistência das estruturas, os diferentes caminhos de carga e as redistribuições das forças internas fazem com que em algumas situações, seja necessária a transferência dessas mesmas forças através de uma fenda. A transmissão das forças através do plano da fenda estabelece-se através do atrito entre os agregados, que pode ser observado na Figura 12. Quando a abertura de fendas é pequena e existe um deslocamento suficientemente grande ao longo da fenda, a transmissão das forças e o atrito entre os agregados acontecem em toda a área da fenda, não se verificando o mesmo quando as fendas têm uma grande abertura, pois o atrito entre agregados acontece de forma mais localizada.



*Figura 12 - Atrito entre os agregados (A. Muttoni, Schwartz, Thurlimann, 1997).*

De forma geral e por questões práticas, considera-se que no estado fendilhado a transmissão de forças internas só é garantida caso a largura das fendas permaneça pequena, podendo isto ser obtido através da utilização de uma adequada quantidade e distribuição de armaduras. Neste contexto, sempre que, num modelo de escoras e tirantes, não são explicitamente calculadas as armaduras, deverá ser disposta uma armadura mínima que garanta a ductilidade e um adequado comportamento em serviço.

## 2.4 Métodos de seleção de modelos

Ao longo dos anos foram sugeridas, pelos mais variados autores, diversas abordagens e métodos de seleção e otimização dos modelos de escoras e tirantes. Estas abordagens foram motivadas pela necessidade de se superarem as dificuldades e as limitações na aplicabilidade destes modelos.

De seguida, alguns destes métodos serão descritos e analisados, nomeadamente:

- Geração e otimização automática de modelos de escoras e tirantes, através de processos iterativos;
- Aplicação do método de caminho de carga para a avaliação de modelos de escoras e tirantes em diferentes fases;
- CAST (Computer - Aided Strut - and - Tie);
- Modelos de campos de tensão adaptativos;
- Método dos elementos finitos (MEF);



## 2.4.1 Geração e otimização automática de modelos de escoras e tirantes através de processos iterativos

Kostic em 2006, apresentou um procedimento que se baseia em abordagens propostas anteriormente por outros autores que consiste em gerar e otimizar modelos de escoras e tirantes automaticamente. Associado a este, também apresentou um novo método para a obtenção de campos de tensão com estados de tensão pseudo - hidrostáticos em todos os nós.

Primeiramente é preciso estabelecer a geometria dos MET e posteriormente devem ser criados os campos de tensão correspondentes. Um dos primeiros passos a ser tomados para gerar de maneira automática os MET, consiste em gerar um modelo inicial onde uma série de nós distribuídos ao longo da malha estão ligados através de barras.

De seguida, segue-se um método baseado na rigidez, que através de processos iterativos permite eliminar do modelo os elementos (barras), que em relação aos outros, não são tão eficientes na transmissão e encaminhamento de cargas (geralmente estes são os menos rígidos).

Para a realização deste processo iterativo, considera-se que inicialmente todos os elementos no primeiro modelo têm a mesma rigidez. Executa-se a primeira iteração e dela são extraídas as forças de cada elemento, que quando divididas pela tensão resistente à compressão (no caso de escoras) e a tensão de cedência (no caso de tirantes), permitem calcular uma nova área e, conseqüentemente, uma nova rigidez associada a cada elemento.

Por fim, as novas iterações são realizadas considerando a rigidez obtida das iterações anteriores e têm o seu fim quando for alcançado um modelo de escoras e tirantes adequado. Um exemplo da aplicação deste procedimento e o modelo de escoras e tirantes resultante, é mostrado na Figura 13.

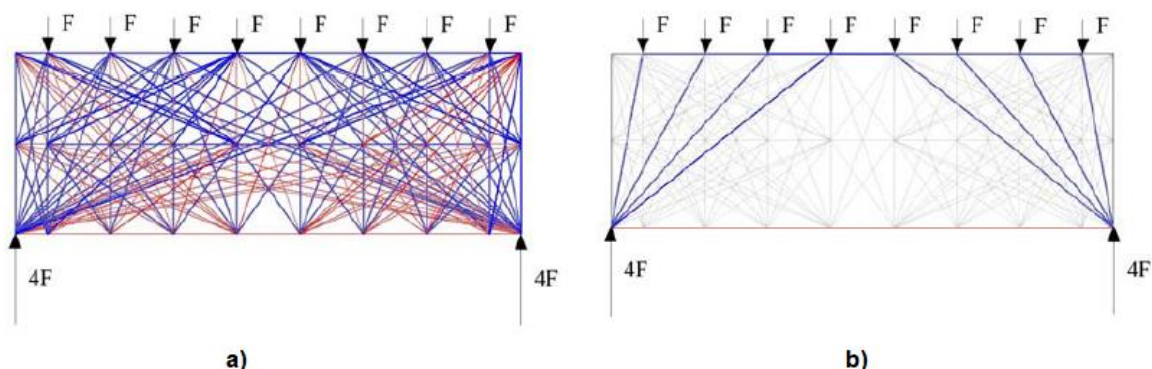


Figura 13 - a) Modelo Inicial com todas as barras; b) Modelo de escoras e tirantes após a otimização (Kostic,2006)

Como já foi referido anteriormente, uma vez obtido o modelo de escoras e tirantes, este pode ser transformado em campos de tensões [Figura 14].

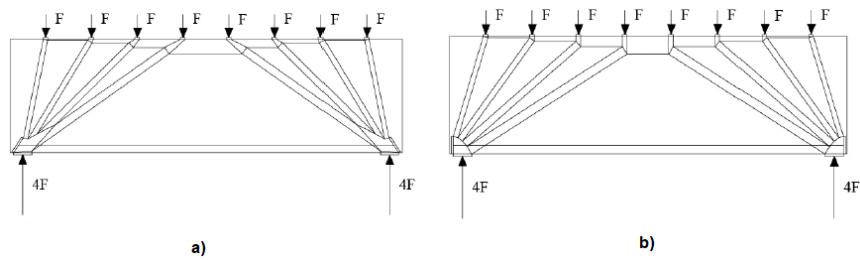


Figura 14 - a) Campo de tensão inicial; b) Campo de tensão (resultante da alteração da posição de alguns elementos do campo de tensão inicial) com nós pseudo – hidrostáticos, (Kostic, 2006).

## 2.4.2 Aplicação do método de caminho de carga para a avaliação de modelos de escoras e tirantes em diferentes fases

Vitone (2006) apresentou a aplicação do método do caminho de carga, para avaliar o modelo de escoras e tirantes de uma estrutura em diferentes fases. Para atingir os níveis de performance pretendidos por este método, foram definidos 8 passos principais, sendo estes:

1 – Escolha do modelo: é considerada uma combinação do método de caminho de carga com o modelo de escoras e tirantes.

2 – Evolução da configuração do corpo estrutural: a configuração estrutural de uma estrutura passa por diferentes alterações e evoluções ao longo do tempo que devem ser consideradas.

3 – Definição das transformações físicas: têm-se em consideração as variações nas características físicas da estrutura, provocadas por diversos fatores.

4 – Interpretação energética: as transformações do sistema podem ser interpretadas pelas alterações de natureza energética do mesmo.

5 – Análise do comportamento estrutural em cada transformação: a fiabilidade do modelo deve ser avaliada na transição de um estado para o outro, como por exemplo do Estado I (estado não fendilhado) ao Estado II (Estado Fendilhado).

6 – Análise do comportamento estrutural no Estado Limite Último (E.L.U): para tal pode ser assumida uma determinada distribuição de armaduras. A probabilidade de a estrutura atingir o ELU depende da satisfação simultânea das condições de equilíbrio e de compatibilidade.

7 – Criação de modelos que consigam simular os diferentes Estados e as suas transformações: estes modelos permitem verificar e analisar o comportamento da estrutura ao longo dos incrementos de carga.

8 – Comparação entre o modelo e a morfologia da distribuição de fendas: esta comparação é de extrema importância, pois permite aumentar as capacidades de diagnóstico preliminar com base em observações empíricas.

A aplicação deste método nos cantos de uma estrutura (na zona de ligação entre um pilar e uma viga) sujeita a momentos e com uma específica distribuição de armaduras, como se pode observar na Figura 15, também foi analisada por Vitone (2006).

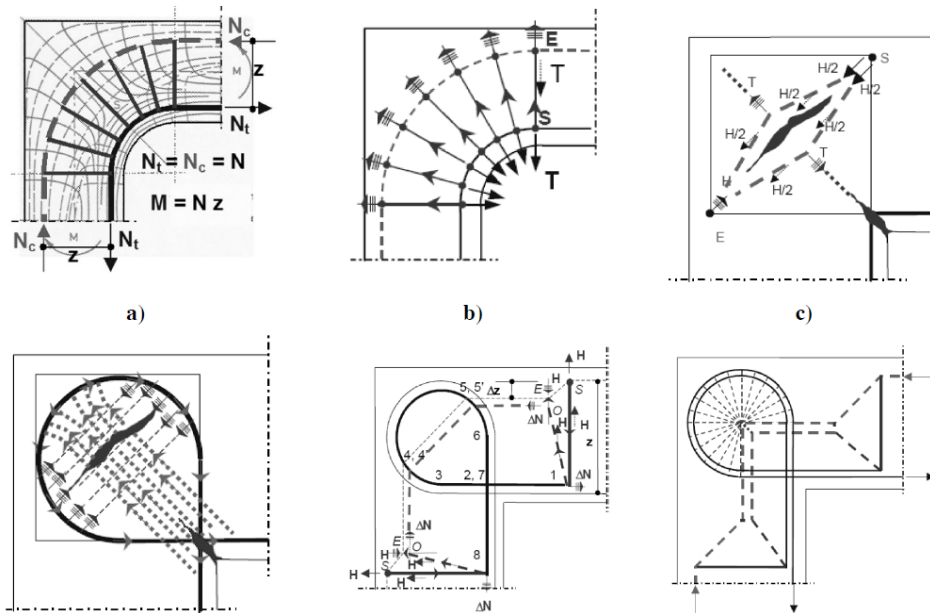


Figura 15 - a) Trajetórias de tensão da fase não fendilhada num canto com um momento aplicado; b) Caminhos de carga na fase não fendilhada; c) Desvios locais dos caminhos de carga após a fendilhação para um reforço de armadura ortogonal; d) Desvios locais dos caminhos de carga após a fendilhação para um reforço de armaduras 'em loop'; e) Modelo de escoras e tirantes para a fase fendilhada; f) Modelo de escoras e tirantes para a carga última (Lourenço, 2010).

### 2.4.3 CAST (Computer - Aided Strut - and - Tie)

Kuchma e Tjhin (2000), apresentaram uma ferramenta de projeto denominada CAST (Computer - Aided Strut - and - Tie). O CAST é um programa informático, 'user friendly', disponibilizado gratuitamente e que tem como base o auxílio do computador no dimensionamento de estruturas através do modelo de escoras e tirantes.

A interface gráfica do programa está equipada com ferramentas que permitem a criação e a modificação da estrutura [Figura 16], seja da sua geometria, condições de apoio, carregamento, propriedades dos diferentes elementos dos modelos de escoras e tirantes, entre outros. Este programa também serve como um pós-processador pois permite aos utilizadores verificar visualmente os modelos e exibir os resultados da análise.

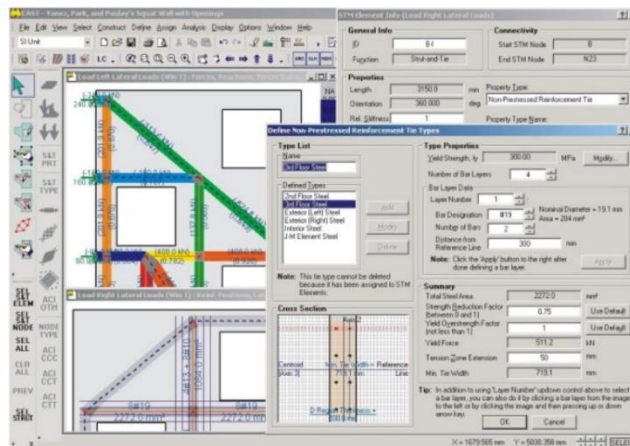


Figura 16 - Interface da ferramenta de 'design' CAST (Kuchma, Tjhin, 2000).

O processamento em CAST é realizado de acordo com alguns princípios, como:

- O comportamento em serviço da estrutura é considerado, pois, tem – se em conta as características cinemáticas e as relações constitutivas não-lineares das escoras e dos tirantes;
- As escoras e os tirantes têm uma forma prismática e da interceção destes é obtida a forma dos nós;
- Em modelos estaticamente determinados, a distribuição de forças para cada elemento do MET é obtida através do equilíbrio estático. Quando estes são estaticamente indeterminados uma das abordagens possíveis é obter esta distribuição com base na rigidez de cada membro.

#### 2.4.4. Modelos de Campos de Tensões Adaptativos (MCTA)

Os modelos de campos de tensão (MCT) e os modelos de escoras e tirantes, são considerados umas das principais ferramentas utilizadas no dimensionamento de Zonas D, porém, estes modelos possuem algumas limitações. Nos MCT são representadas as larguras dos campos, enquanto que nos MET são representadas apenas as resultantes. Tendo a largura dos elementos, pode-se incluir a compatibilidade e as relações constitutivas na análise. Os MCTA, desenvolvida por Lourenço, Almeida (2013), expandem a utilização dos MCT incluindo a adaptabilidade, permitindo uma análise não-linear de Zonas D, podendo ser avaliadas o comportamento em serviço e a ductilidade. Efetivamente, os MCTA permitem obter a configuração do modelo e a redistribuição das tensões a cada incremento de carga, através de princípios de energia mínima. De forma geral, os conceitos e as simplificações dos MCT são considerados definindo uma distribuição inicial dos campos de tensões e as variáveis a ajustar (e.g. a geometria dos modelos – ver Fig. 17).

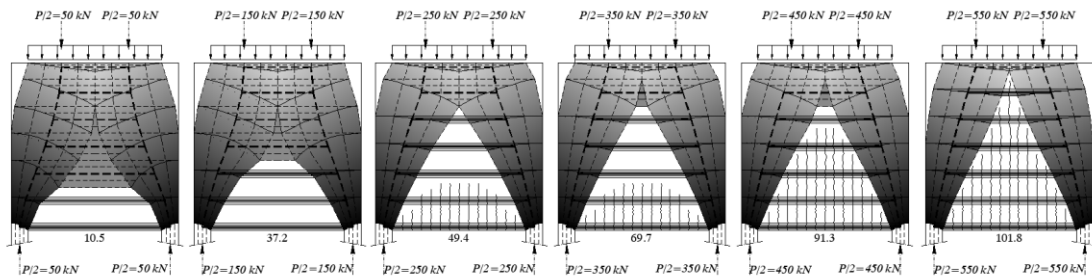


Figura 17 – Modelos de campos de tensões adaptativos de uma viga parede para diferentes incrementos de carga (Lourenço, Almeida, 2013)

Os MCTA são aplicados à selecção e avaliação de modelos de escoras e tirantes de diversas regiões consideradas típicas, i.e., são utilizados MET para obter a pormenorização das armaduras e efetuada uma análise não-linear de modo a avaliar o comportamento em serviço e a ductilidade.

## 2.5 Modelos básicos de escoras e tirantes

Os modelos de escoras e tirantes mais complexos podem ser obtidos e projetados através da combinação de modelos mais simples. Logo, o conhecimento e o estudo destes modelos 'base', são de extrema importância, sendo alguns destes:

- Viga – parede com carga distribuída;
- Viga – parede com carga suspensa distribuída;
- Consola curta com carga concentrada suspensa;
- Vigas com degrau;

Os modelos base enunciados anteriormente, encontram – se representados na figura a seguir [Figura 18].

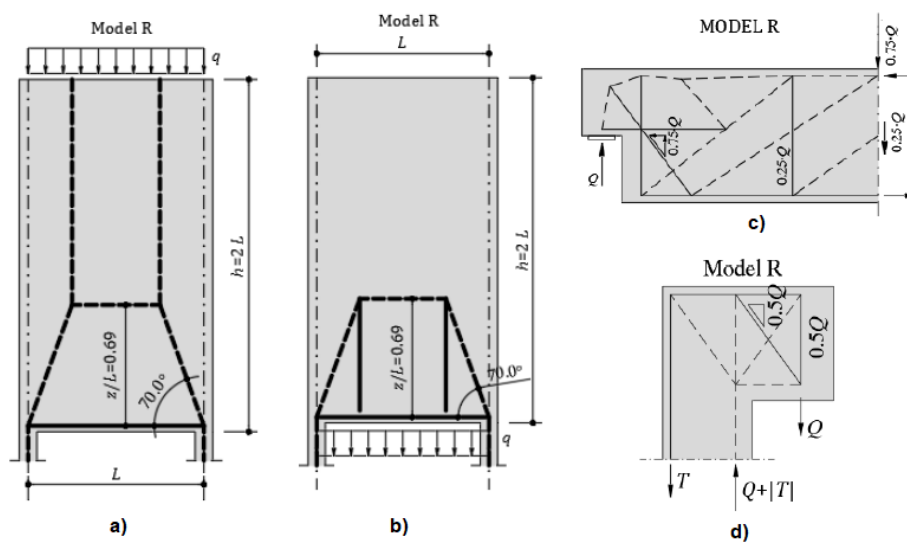


Figura 18 - Modelos de referência de escoras e tirantes: a) Viga – parede com carga distribuída; b) Viga – parede com carga suspensa distribuída; c) Vigas com degrau; d) Consola curta com carga concentrada suspensa;

## 2.5.1 Vigas com degrau

### 2.5.1.1 Análise e resultados

As recomendações e os resultados relativos às vigas com degrau, serão apresentados de maneira mais detalhada, visto que este é o caso de estudo desta dissertação.

De acordo com Lourenço (2010), a solução elástica para este caso sugere a sobreposição de dois modelos, um modelo com armadura ortogonal que equilibra 25% da carga e outro com armadura inclinada sujeito aos restantes 75% da carga aplicada [Figura 18 – c)]. Uma das principais questões neste estudo, consiste na quantidade de armadura diagonal necessária para controlar a fenda diagonal que aparece no canto reentrante.

Para melhor avaliar o comportamento em serviço, foram desenvolvidos três modelos distintos:

- Modelo de Referência: baseado na solução elástica;
- Modelo 1: em que 50% da carga é equilibrada pela armadura ortogonal e a restante pela inclinada;
- Modelo 2: em que 10% da carga é equilibrada pela armadura inclinada e a restante pela ortogonal;

Na figura a seguir [Figura 19] representam-se as variações das tensões obtidas nas diferentes armaduras através de análises efetuadas com o MCTA e para diversos incrementos de carga. A variável  $k_d$  representa a percentagem de carga que é equilibrada pela armadura ortogonal.

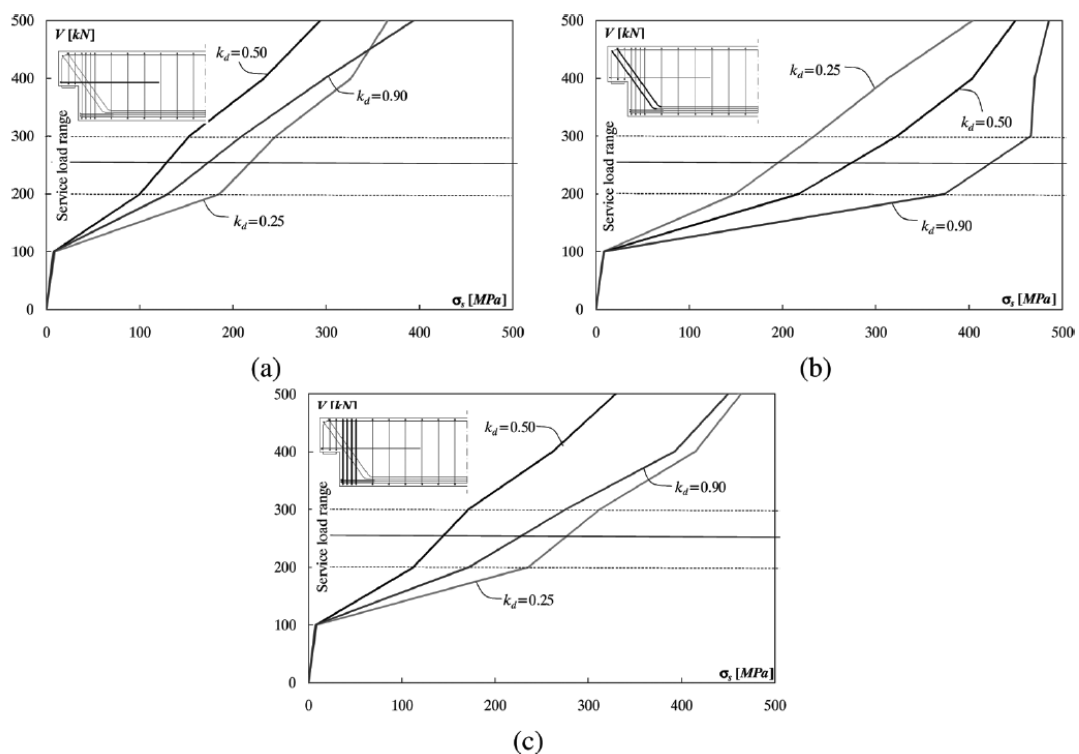


Figura 19 - Variação das tensões das armaduras: a) Horizontais; b) Inclinadas; c) Verticais (Lourenço, Almeida, 2013).

Lourenço e Almeida (2013), através dos MCTA obtiveram algumas conclusões:

- Antes da estrutura fendilhar, a parte da carga que é equilibrada pela armadura ortogonal segue a teoria da elasticidade em todos os modelos. Imediatamente após a formação da primeira fenda, existe uma redistribuição de tensões e o caminho de carga tende a seguir o 'design' do MET inicial;

- Considerando o comportamento em serviço, foram obtidas tensões aceitáveis para os diferentes modelos, no entanto, a armadura diagonal atingiu tensões muito próximas da tensão de cedência do aço para o caso do modelo 2. Isto pode estar relacionado com uma abertura de fendas indesejada, que é um grande indicador de que a armadura ortogonal não controla de maneira eficiente a abertura da fenda diagonal do canto reentrante.

Mata Falcón em 2015, estudou o comportamento deste tipo de vigas. Através de ensaios experimentais e da utilização combinada de MET com modelos de campos de tensões chegou a determinadas conclusões:

- A abertura de fendas é reduzida se um dos tirantes ortogonais estiver sobredimensionado, no entanto, essa redução é maior quando existe uma maior contribuição da armadura inclinada. Em condições de serviço, a abertura de fendas é entre 20% a 40% menor se entre 40% a 80% do mecanismo de resistência ortogonal for substituído por reforço diagonal;

- Para se atingir em condições de serviço, uma abertura de fendas no canto reentrante de no máximo 0.3 mm, a quantidade de armadura dimensionada para o estado limite último deve ser aumentada entre 25% a 100%. Caso se queira uma abertura de fendas de 0.1 mm este aumento varia entre 150% a 250%;

# 3. Modelação e análise através de elementos finitos

## 3.1 Método dos elementos finitos (MEF)

Como já foi referido anteriormente, nesta dissertação usaram-se o método dos elementos finitos e o programa EvalS desenvolvido por Miguel Ferreira (2017). A abordagem com o MEF desenvolvida por Ruiz e Muttoni (2007), consiste numa análise não linear que supera as limitações no desenvolvimento de campo de tensões baseado em análises elásticas sem considerar a fendilhação do betão.

Esta abordagem pode ser usada para obter campos de tensão adequados para dimensionamento e também permite conhecer os diferentes caminhos de carga de estruturas complexas.

Para a sua aplicação, é necessário conhecer-se apenas um número limitado de parâmetros que tenham um significado físico (como a resistência e módulo de elasticidade). Porém, muitos outros parâmetros podem ser adicionados e utilizados caso se pretenda obter um modelo mais refinado.

O comportamento do betão é simulado desprezando a sua resistência a tração e assumindo que as direções principais de tensão são paralelas às direções principais de deformação, o valor das tensões também é obtido através destas deformações. O valor da resistência à compressão do betão é afetado e deve ser corrigido de acordo com as extensões transversais de tração. Considera-se que o betão tem uma resposta elástica até a cedência e perfeitamente plástica após, como se pode ver na Figura 20- e).

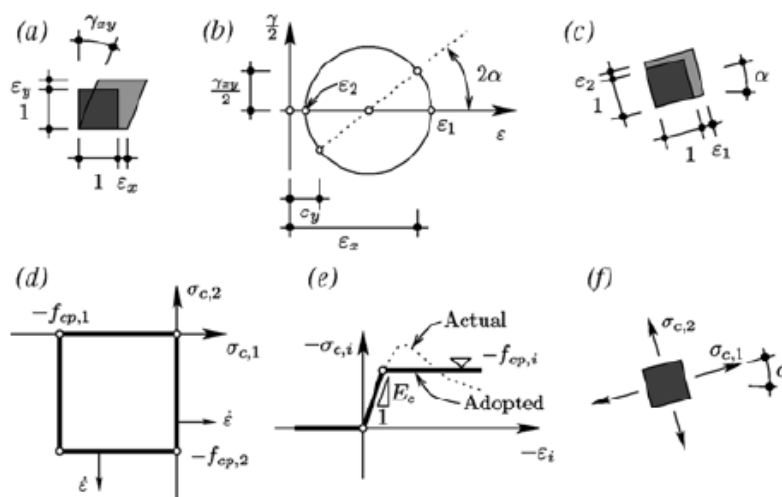


Figura 20 - Modelação do betão: a) Deformações; b) Círculo de Mohr e deformações principais; c) Direções das deformações principais; d) Superfície de cedência adotada para o estado plano de tensão; e) Resposta tensão – deformação adotada; f) Direções principais assumidas para as tensões (Ruiz, Muttoni, 2007).



A simulação do betão com este comportamento através de elementos finitos pode ser realizada usando diversos elementos. Neste trabalho foram utilizados os Elementos CST (Constant Strain Triangle) que representam triângulos com seis graus liberdade e que têm uma deformação constante no seu domínio. Estes elementos podem ser visualizados na figura a seguir [Figura 21].

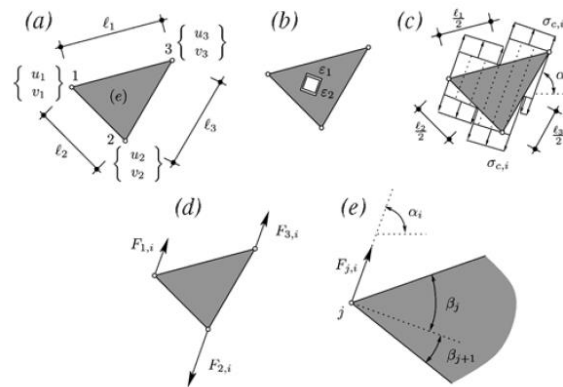


Figura 21 - Elemento CST (constant strain triangle): a) Campo de deslocamentos no elemento; b) Campo de deformações no elemento; c) Campo de tensão assumido para a direção principal  $i$ ; d) Forças nodais; e) Ângulo  $\beta$  em cada nó  $j$  (Ruiz, Muttoni, 2007).

A modelação do aço é feita através de elementos tipo barra com quatro graus de liberdade e considerando que este tem uma resposta uniaxial com uma lei elasto-plástica bilinear, como se pode observar na Figura 22. A resposta do aço é definida pela resistência do material  $f_y$ , o seu módulo de elasticidade  $E_s$  e o seu módulo de deformação plástica  $E_h$ .

Os efeitos do tension stiffening, que é o aumento da rigidez axial do tirante devido ao betão envolvente, também foram considerados, de modo a permitir uma análise em serviço. A lei de tension stiffening inserida no programa foi baseada no Model Code 1990.

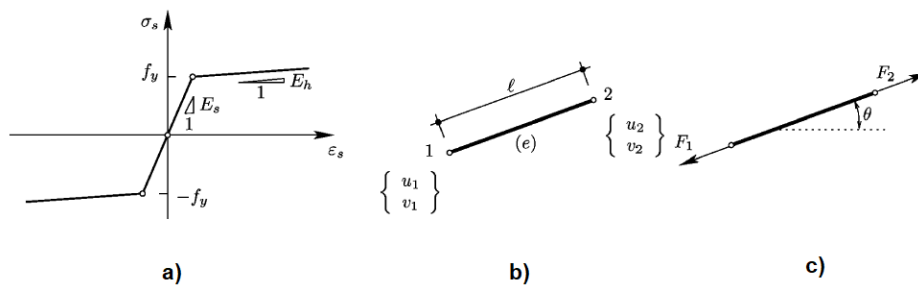


Figura 22 - Modelação do aço: a) Comportamento elasto – plástico do aço com endurecimento por deformação; b) Campo de deslocamentos no elemento tipo barra; c) Forças nodais no elemento tipo barra (Ruiz, Muttoni, 2007).

O conjunto de equações não lineares é resolvido usando o método de convergência de Newton Raphson, que calcula a matriz de rigidez elástica e esta mantém-se constante ao longo das iterações.

## 3.2 Caso de Estudo

Neste capítulo do trabalho, são enunciados os diferentes dados e características necessárias à avaliação do comportamento de vigas com degrau na extremidade.

Esta viga tem uma secção de 0.25m x 1.0m e um vão de 5m. Os apoios estão localizados no centro do canto reentrante, que tem uma secção com 0.25m x 0.50m e um comprimento de 0.5m. Relativamente as características dos materiais, foram adotados um betão C60 e um aço A500. A escolha da classe de resistência do betão foi condicionada de modo a que compressões nos apoios não sejam condicionantes e a rotura ocorrer sempre por cedência das armaduras.

A viga está submetida a uma carga concentrada de 1000kN aplicada a meio vão da estrutura. Na figura a seguir [Figura 23] faz-se uma representação da viga com as características e condições enunciadas.

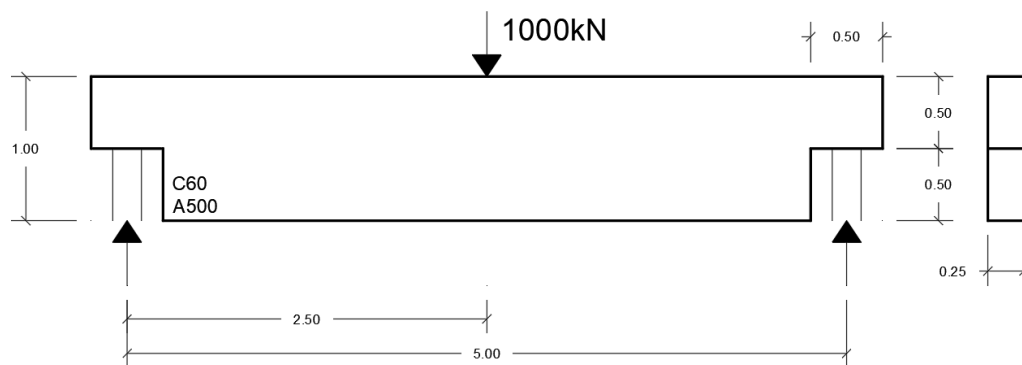


Figura 23 – Dimensões, características e carregamento da Viga com Degrau.

No que respeita ao modelo de análise de elementos finitos e de modo a reduzir o esforço computacional, fez-se uma simplificação de simetria como se pode ver na figura 24.

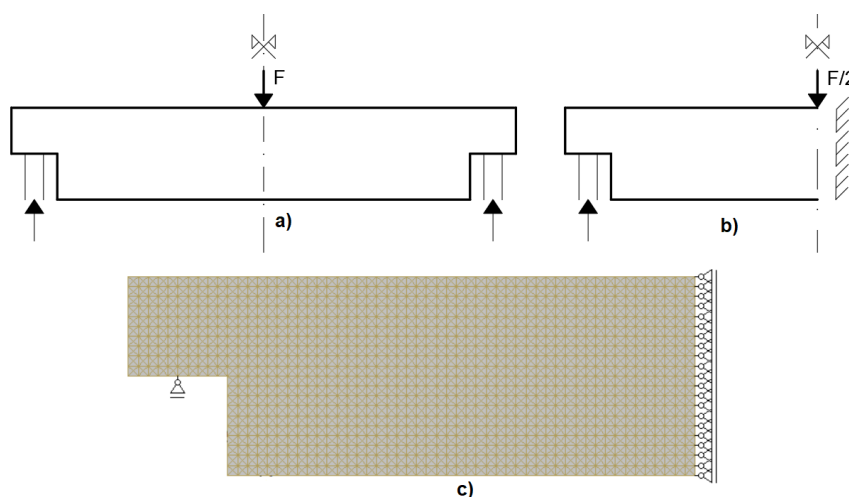


Figura 24 – Simplificação de simetria da viga e do seu carregamento: a) Viga com degrau; b) Aplicação da simetria na Viga; c) Modelo Simplificado da Viga.

A carga concentrada de 500kN do modelo simplificado, foi distribuída ao longo da largura do apoio, de modo a evitar uma concentração elevada de tensões no betão [Figura 25].

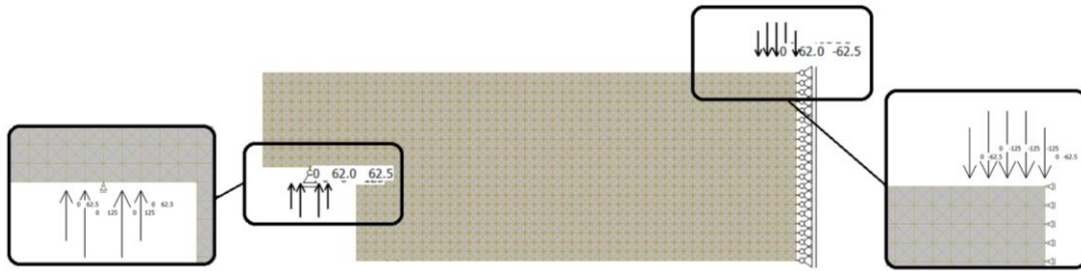


Figura 25 – Distribuição da carga concentrada de 500kN.

No que respeita aos modelos de dimensionamento, para a construção dos modelos de escoras e tirantes considerou-se um ângulo  $\theta_1$  de  $45^\circ$  (correspondente ao ângulo de inclinação da primeira escora do apoio) e um ângulo  $\theta$  de  $30^\circ$  (que corresponde ao ângulo de inclinação das escoras na Zona Corrente), obtendo-se os modelos indicados na Figura 26.

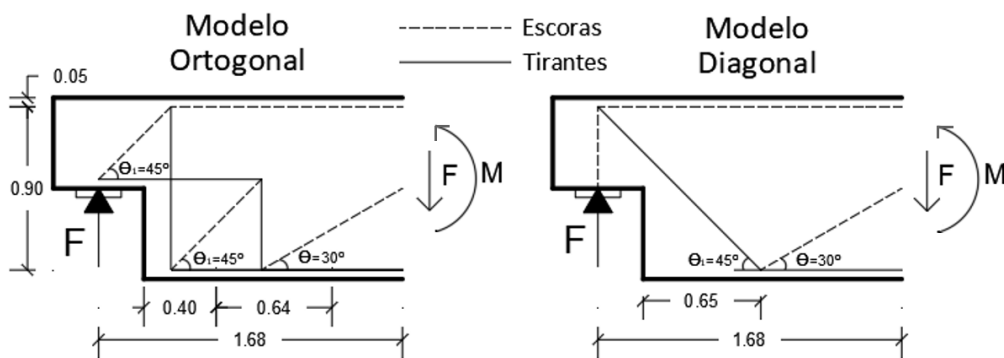


Figura 26 – Dimensões e características dos modelos de escoras e tirantes da viga com degrau.

Todas as características e condições enunciadas neste capítulo, são transversais aos diferentes modelos.

### 3.3 Análise dos modelos de viga com degrau

Nesta dissertação foram considerados modelos com características distintas, visando alcançar uma avaliação completa do comportamento deste tipo de estrutura. Os modelos utilizados foram:

- Modelo de Referência ( $k_d = 0.25$ );
- Modelo 1 ( $k_d = 0.5$ );
- Modelo 2 ( $k_d = 0.75$ );
- Modelo 3 ( $k_d = 1$ );
- Modelo 4 ( $k_d = 0$ );

A variável  $k_d$  representa a porcentagem de carga que é equilibrada pela armadura ortogonal.

#### 3.3.1 Modelo de Referência ( $k_d = 0.25$ )

##### 3.3.1.1 Cálculos de dimensionamento

Como já foi referido Capítulo 2.5.1, a distribuição de forças no modelo de referência é feita considerando  $k_d = 0.25$  em que 25% (125kN) da carga total (500kN) é equilibrada pelas armaduras ortogonais e os restantes 75% (375kN) pelas armaduras inclinadas. Os modelos de escoras e tirantes resultante desta distribuição pode ser observado na figura a seguir [Figura 27].

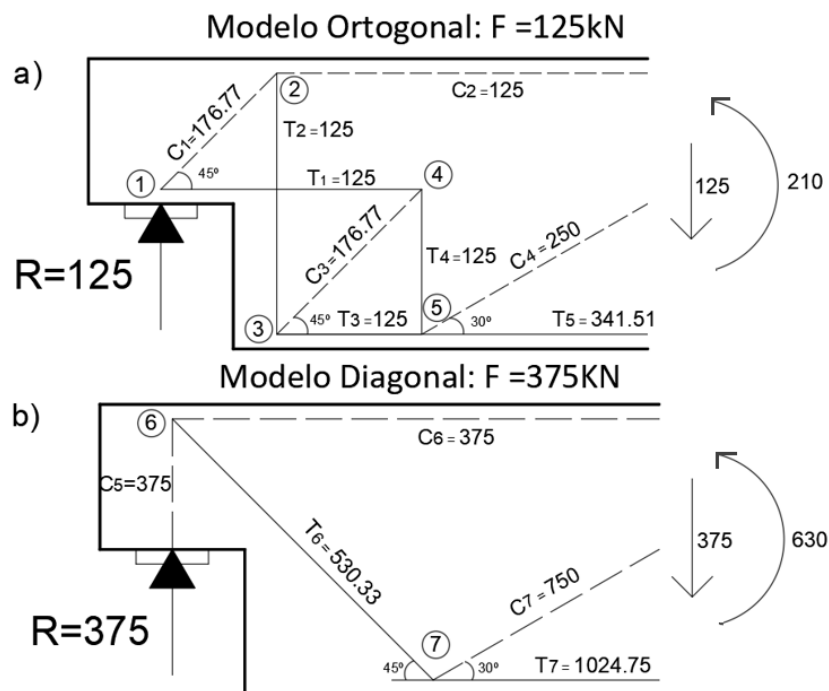


Figura 27 – Modelo de escoras e tirantes ( $k_d = 0.25$ ): a) Ortogonal; b) Diagonal.

## Equilíbrio nodal

Os valores das forças nas escoras e nos tirantes é obtido através do equilíbrio nos nós. Devido ao facto da configuração do modelo não se alterar, apenas a distribuição das forças, as fórmulas de cálculo para obtenção do equilíbrio nos nós é igual para os diversos modelos. Sendo assim, este cálculo será demonstrado apenas para o modelo de referência, de forma a tornar a leitura da dissertação mais fluída. De seguida, mostram-se as fórmulas usadas no cálculo dessas forças para os diferentes elementos:

### Nó 1:

$$C_1(kN) = \frac{R_1}{\sin(\Theta_1)} = \frac{125}{\sin(45)} = 176.77kN \quad (10)$$

$$T_1(kN) = C_1 \times \cos(\Theta_1) = 176.77 \times \cos(45) = 125kN \quad (11)$$

### Nó 2:

$$C_2(kN) = C_1 \times \cos(\Theta_1) = 176.77 \times \cos(45) = 125kN \quad (12)$$

$$T_2(kN) = C_1 \times \sin(\Theta_1) = 176.77 \times \sin(45) = 125kN \quad (13)$$

### Nó 3:

$$C_3(kN) = \frac{T_2}{\sin(\Theta_1)} = \frac{125}{\sin(45)} = 176.77kN \quad (14)$$

$$T_3(kN) = C_3 \times \cos(\Theta_1) = 176.77 \times \cos(45) = 125kN \quad (15)$$

### Nó 4:

$$T_4(kN) = C_3 \times \sin(\Theta_1) = 176.77 \times \sin(45) = 125kN \quad (16)$$

### Nó 5:

$$C_4(kN) = \frac{T_4}{\sin(\Theta)} = \frac{125}{\sin(30)} = 250kN \quad (17)$$

$$T_5(kN) = T_3 + C_4 \times \cos(\Theta) = 125 + 250 \times \cos(30) = 341.51kN \quad (18)$$

### Nó 6:

$$C_5(kN) = R_2 = 375kN \quad (19)$$

$$T_6(kN) = \frac{C_5}{\sin(\Theta_1)} = \frac{375}{\sin(45)} = 530.33kN \quad (20)$$

$$C_6(kN) = T_6 \times \cos(\Theta_1) = 530.33 \times \cos(45) = 375kN \quad (21)$$

### Nó 7:

$$C_7(kN) = \frac{T_6 \times \sin(\Theta_1)}{\sin(\Theta)} = \frac{530.33 \times \sin(45)}{\sin(30)} = 750kN \quad (22)$$

$$T_7(kN) = C_7 \times \cos(\Theta) + T_6 \times \cos(\Theta_1) = 750 \times \cos(30) + 530.33 \times \cos(45) = 1024.75kN \quad (23)$$

Como resumo dos resultados obtidos, apresenta – se a tabela a seguir [Tabela 1]:

Tabela 1- Resumo das forças nas escoras e nos tirantes do modelo ( $kd = 0.25$ ).

Força nos diferentes elementos (kN)			
C1	176.77	T1	125
C2	125	T2	125
C3	176.77	T3	125
C4	250	T4	125
C5	375	T5	341.51
C6	375	T6	530.33
C7	750	T7	1024.75

### Dimensionamento de armaduras

Através do valor do momento, do cálculo das forças nos tirantes e tendo em consideração o aço A500, foram calculadas as áreas das armaduras necessárias. As fórmulas a seguir, usadas para o cálculo das armaduras, serão mostradas apenas no modelo de referência, pois, são iguais para todos os modelos mudando apenas o valor das variáveis.

#### Armadura longitudinal:

O valor de momento a meio vão e as respectivas armaduras são iguais em todos os modelos e foram calculados da seguinte forma:

$$M_{sd}(kNm) = \frac{P \times L}{4} = \frac{1000 \times 5}{4} = 1250kNm \quad (24)$$

Onde:

$M_{sd}$  – valor de cálculo do momento à meio vão;

P – valor da carga concentrada;

L – valor do vão;

O cálculo da armadura longitudinal foi feito usando tabelas de cálculo e as seguintes fórmulas:

$$\mu = \frac{M_{sd}}{b \times d^2 \times f_{cd}} = \frac{1250}{0.25 \times 0.95^2 \times 40 \times 10^3} \approx 0.14 \quad (25)$$

$$\rightarrow \omega = 0.155$$

$$A_s(cm^2) \geq \frac{\omega \times b \times d^2 \times f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0.155 \times 0.25 \times 0.95^2 \times 40 \times 100^2}{435} \quad (26)$$

$$= 34.60cm^2 \rightarrow 12\emptyset 20 (37.70cm^2)$$

Onde:

$\mu$  – momento fletor reduzido;

$b$  – largura da zona comprimida em flexão;

$d$  – altura útil;

$\omega$  – percentagem mecânica de armadura;

$A_s$  – área de armadura;

### **Estribos (Zona Corrente):**

As áreas de armadura transversal e da respetiva armadura mínima também são iguais em todos os modelos:

$$z(m) \cong 0.9 \times d = 0.855m \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_{sw}}{s} (cm^2/m) &\geq \frac{V_{sd}}{z \cot g(\Theta) \times f_{yd}} & (28) \\ &= \frac{500}{0.9 \times 0.95 \times \cot g(30) \times 435 \times 10^3} \times 100^2 \\ &= 7.76 cm^2/m \rightarrow Est \text{ } \emptyset 12 // 0.25 (4.52 cm^2/face) \end{aligned}$$

Onde:

$\frac{A_{sw}}{s}$  – área de armadura de transversal por unidade de comprimento;

$\frac{V_{sd}(kN)}{z \cot g(\Theta)}$  – força vertical por unidade de comprimento;

De seguida, foi necessário calcular a armadura mínima de armadura transversal para a região do canto reentrante:

$$\begin{aligned} A_{sw,min}(cm^2/m) &\geq \frac{0.08 \times b \times \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} = \frac{0.08 \times 0.25 \times \sqrt{60}}{500} \times 100^2 & (29) \\ &= 3.1 cm^2/m \rightarrow Est \text{ } \emptyset 6 // 0.20 (1.41 cm^2/face) \end{aligned}$$

Onde:

$A_{sw,min}$  – área mínima de armadura transversal;

$f_{yk}$  – tensão característica do aço;

### Tirantes:

A armadura dos tirantes  $T_1$  e  $T_2$  (horizontal e vertical) está concentrada, a armadura do tirante  $T_4$  está distribuída e a área de armaduras para os mesmos é calculada da seguinte forma:

$$A_s(cm^2) = \frac{T_1 \text{ ou } T_2 \text{ ou } T_4}{f_{yd}} \times 10 = \frac{125}{435} \times 10 = 2.875(cm^2) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} T_1 \text{ ou } T_2 &\rightarrow 4\emptyset 10 (3.14 \text{ cm}^2) \\ T_4 &\rightarrow \text{Est } \emptyset 6//0.15 (1.88 \text{ cm}^2/\text{m}/\text{face}) \end{aligned}$$

A armadura do tirante inclinado  $T_6$  também está concentrada:

$$\begin{aligned} A_s(cm^2) &= \frac{T_6}{f_{yd}} \times 10 = \frac{530.33}{435} \times 10 \\ &= 12.19 (cm^2) \rightarrow 4\emptyset 20 (12.57 \text{ cm}^2) \end{aligned} \quad (31)$$

A armadura necessária resultante da sobreposição dos tirantes  $T_5$  e  $T_7$  é concentrada, igual em todos os modelos e calcula-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_s(cm^2) &= \frac{T_5 + T_7}{f_{yd}} \times 10 = \frac{341.51 + 1024.55}{435} \times 10 \\ &= 31.41 (cm^2) \rightarrow 10\emptyset 20 (31.42 \text{ cm}^2) \end{aligned} \quad (32)$$

Nota: A área do tirante  $T_3$ , corresponde ao restante da área de armadura longitudinal que não foi transformada em armadura diagonal. Também foram adotados, para a armadura de compressão (que também é constante em todos os modelos) 2 varões de diâmetro 12.

Como resumo dos resultados obtidos, apresenta – se a tabela a seguir [Tabela 2]:

Tabela 2 – Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 0.25$ ).

Área de armadura necessária		Varões escolhidos
Concentrada ( $cm^2$ )		( $cm^2$ )
( $T_5 + T_7$ ) //Armadura longitudinal	31.4//34.6	10 $\emptyset$ 20(31.43) // //12 $\emptyset$ 20 (37.30)
Armadura de compressão	-	2 $\emptyset$ 12 (2.26)
$T_1$ ou $T_2$	2.875	4 $\emptyset$ 10 (3.14)
$T_6$	12.19	4 $\emptyset$ 20 (12.57)
Distribuída ( $cm^2/m$ )		(( $cm^2$ )/m)/face
Estribos (Zona Corrente)	7.76	$\emptyset$ 12//0.25 (4.52)
Armadura mínima de esforço transversal	2.53	$\emptyset$ 6//0.20 (1.41)
$T_4$	3.59	$\emptyset$ 6//0.15 (1.88)



Na Figura 28, é apresentada uma pormenorização das armaduras. Esta pormenorização é realizada para ser usada como base para a modelação da estrutura em elementos finitos e apenas ilustrativa ou académica. Em casos reais, devem ser considerados as boas regras de pormenorização, nomeadamente nas amarrações e quantidades de armaduras.

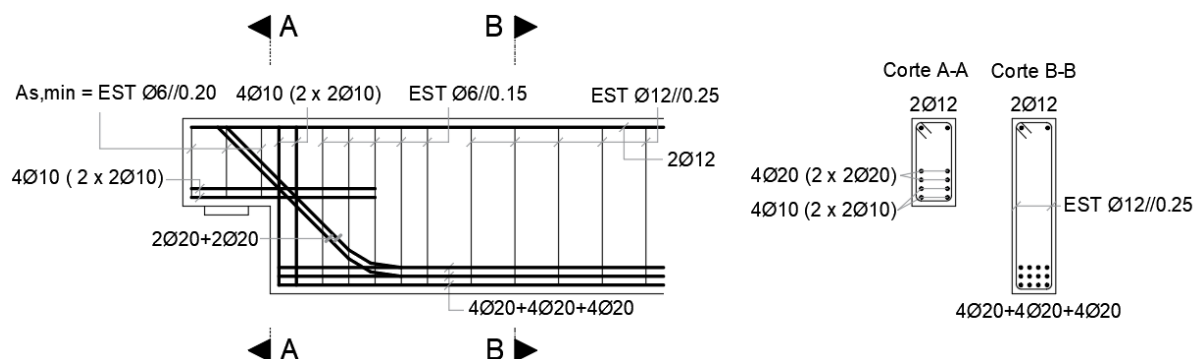


Figura 28 – Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 0.25$ ).

Nos restantes capítulos, para uma melhor compreensão, as denominações das armaduras a avaliar passarão a ser as seguintes:

T1 – Armadura Ortogonal Horizontal; T2 – Armadura Ortogonal Vertical;

T4 – Armadura Ortogonal Distribuída; T6 – Armadura Inclinada;

De seguida, é mostrada novamente uma figura com os tirantes, para compreender melhor estas denominações e o que estes representam comparativamente a distribuição das armaduras [Figura 29].

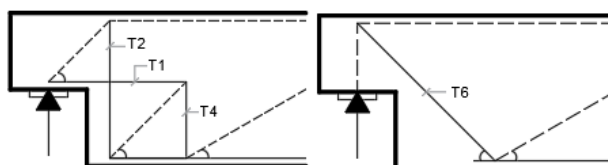


Figura 29 – Indicação dos tirantes do M.E.T.

### 3.3.1.2 Análise de Resultados

Nesta fase, foi simulado e analisado o comportamento da viga através de elementos finitos no programa EvalS, tendo em conta a pormenorização indicada. Como resultados destas simulações, são obtidas as tensões nas armaduras, as tensões de compressão no betão e a redução da resistência do betão devido às extensões transversais de tração.

Primeiramente, foram avaliados os níveis de tensão nas armaduras. Na Figura 30 mostra-se o modelo e as forças nas armaduras em incrementos de carga diferentes.

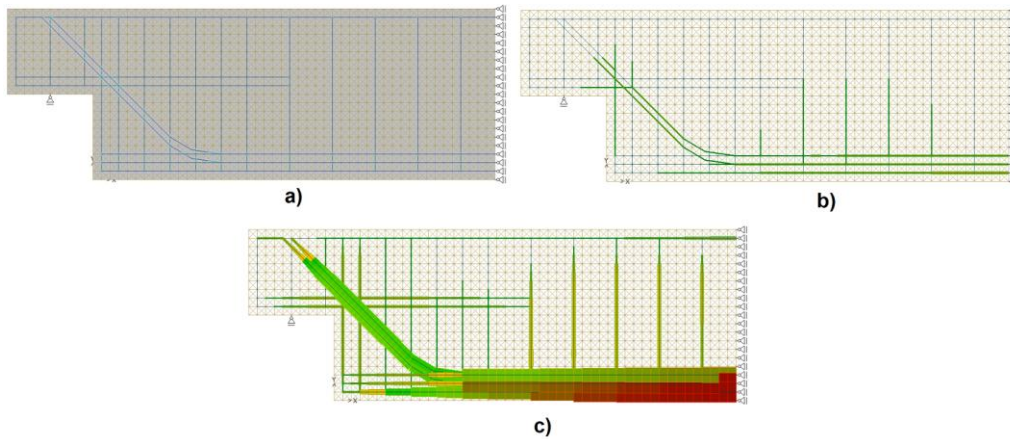


Figura 30 – a) Modelo de Viga com Degrau; b) Forças nas armaduras ( $q/q_d = 0.6$ ); c) Força nas armaduras ( $q/q_d = 1.0$ )

Com os resultados obtidos e através de um programa de pós-processamento de dados de minha autoria, foi possível construir-se gráficos de tensão ( $\sigma_s/f_{yd}$ ) nas diferentes armaduras em cada incremento de carga ( $q/q_d$ ). Considera-se que tensões entre 200-300MPa provocam uma abertura de fendas de aproximadamente 0.2mm – 0.3mm. Tendo estes valores como termo de comparação é possível analisar o comportamento em serviço, que neste caso corresponde ao intervalo de 250kN à 350kN dos incrementos de carga. A variação das tensões pode ser vista nas Figuras 31,32,33,34.

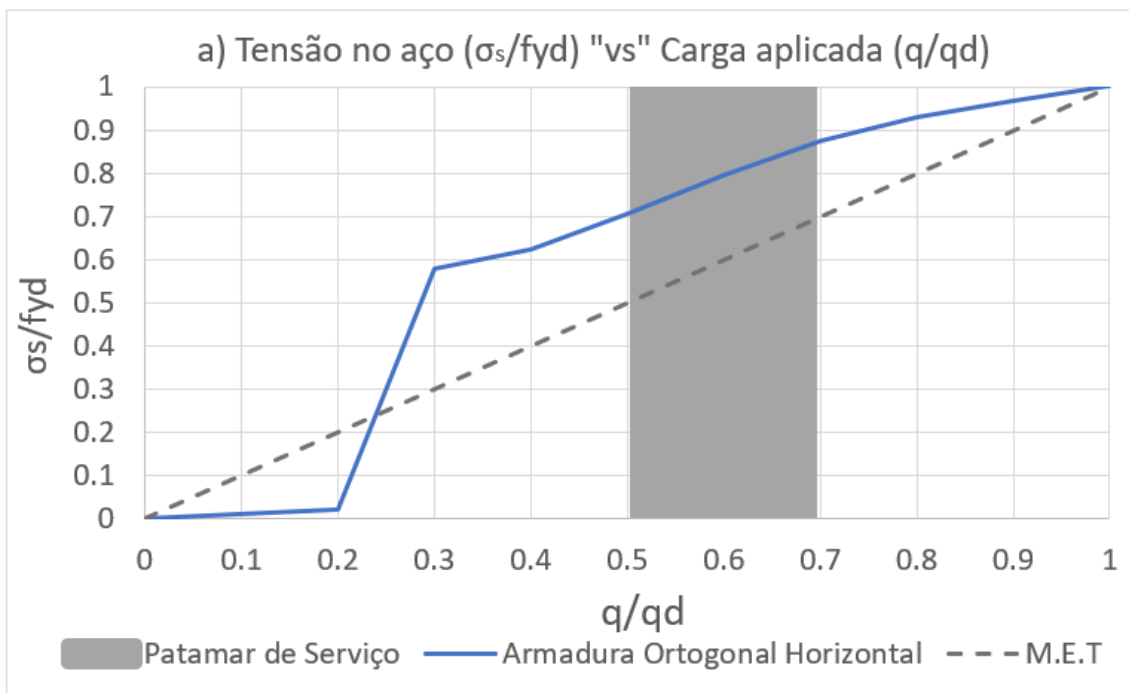


Figura 31 – Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 0.25$ ).

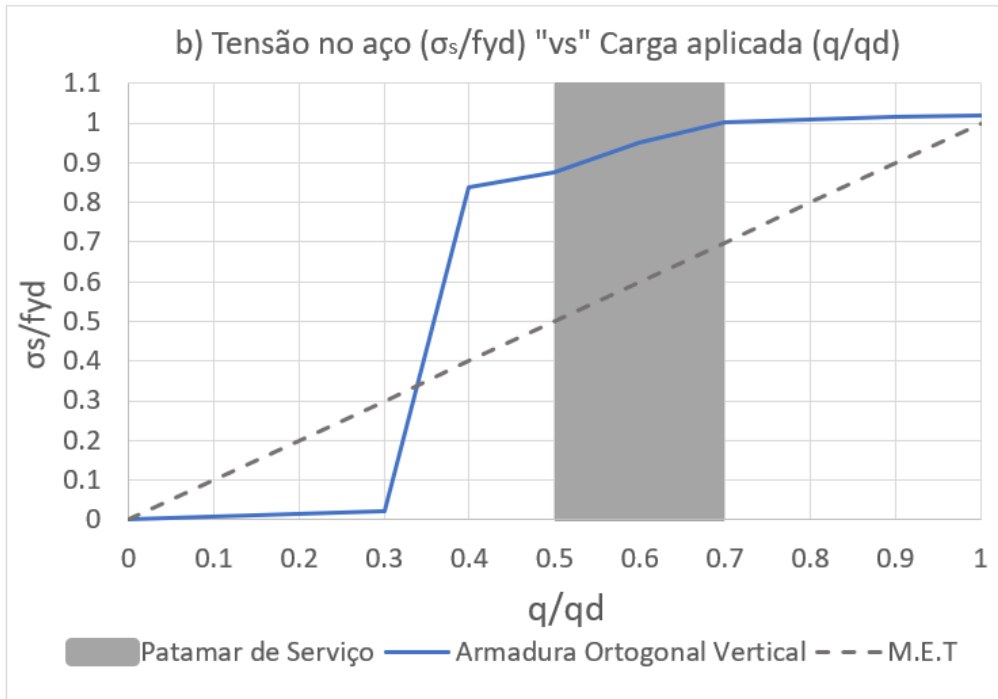


Figura 32 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 0.25$ ).

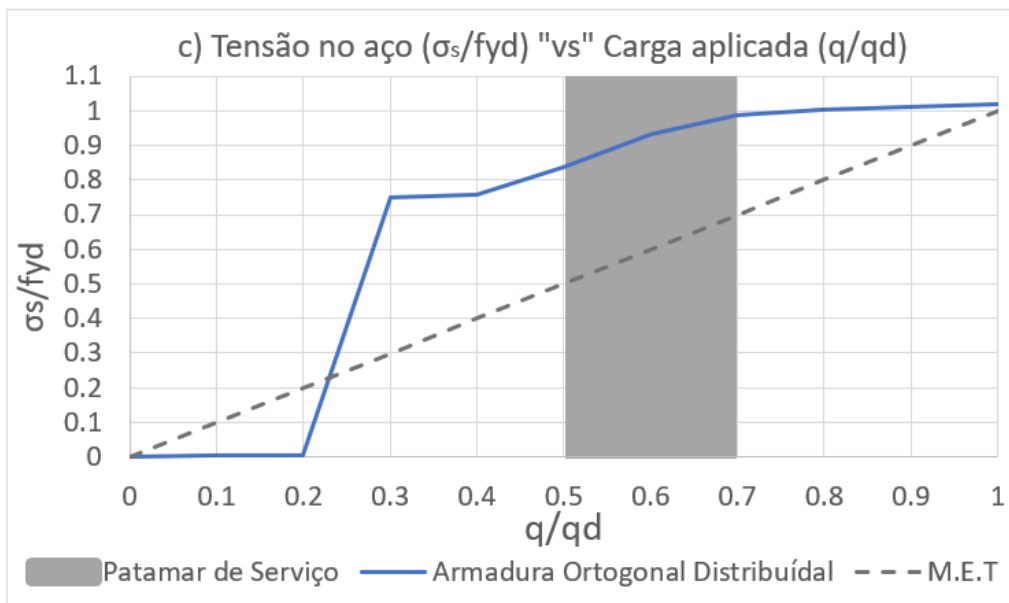


Figura 33 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $k_d = 0.25$ ).

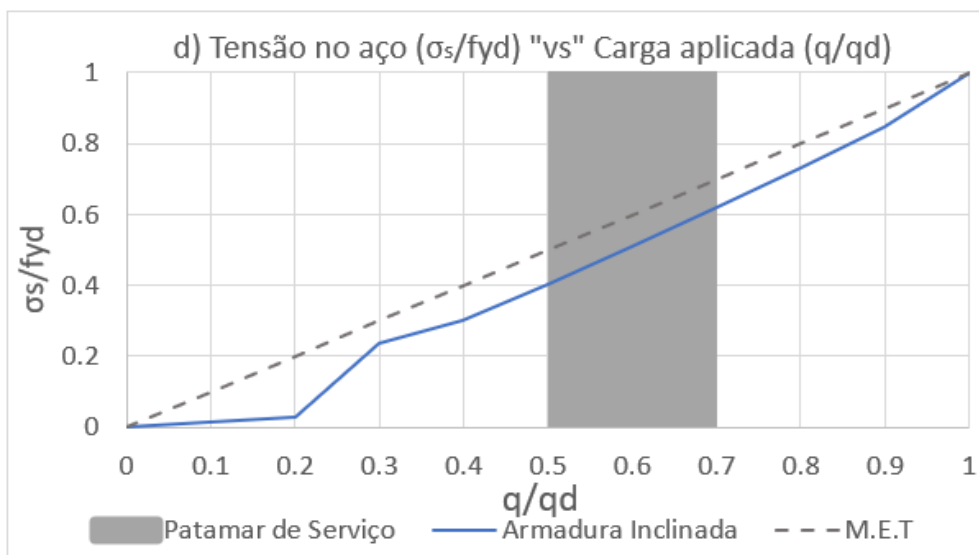


Figura 34 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 0.25$ ).

Pela variação das tensões, vê-se que em serviço a armadura ortogonal horizontal atinge níveis de tensão de 308MPa à 380MPa em serviço. A armadura ortogonal vertical e a distribuída, também apresentam, na zona de serviço, níveis de tensão entre 381MPa à 437MPa e 365MPa à 429MPa, respetivamente. No que respeita a armadura inclinada atingiu-se tensões de 176MPa e de 270MPa. Note-se que é usual nestes casos que a abertura de fendas seja perpendicular à armadura inclinada, pelo que a extensão na armadura inclinada tem mais influência na largura da fenda do que a armadura ortogonal. Neste contexto, mesmo que a armadura ortogonal apresente localmente, na zona do canto reentrante, valores de tensões elevados, pode não indiciar um mau comportamento em serviço. Efetivamente, é sabido que a armadura ortogonal é pouco eficiente para controlar a fenda inclinada, pelo que o facto de a armadura inclinada conduzir a valores de tensão aceitáveis, é expectável que o comportamento em serviço seja igualmente aceitável.

Na Figura 35 mostra – se a redução da resistência do betão para dois passos de carga. Os andamentos das tensões atuantes na estrutura estão representados na Figura 36.

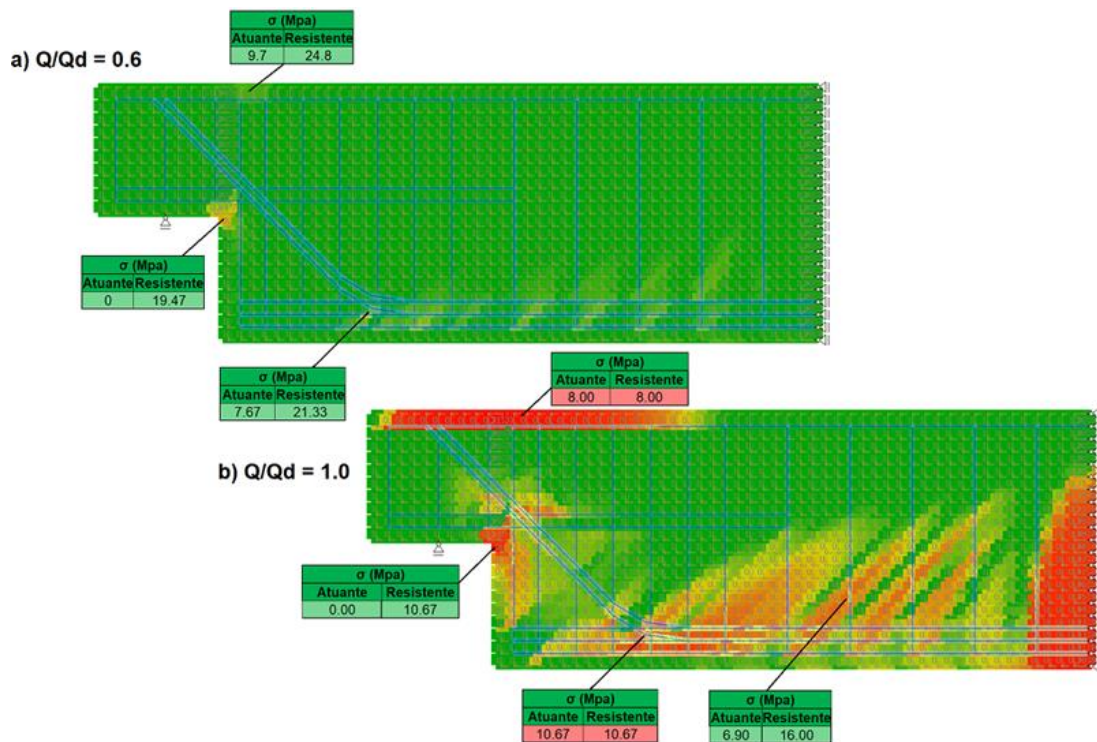


Figura 35 – Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.25$ ): a) Em  $q/q_d = 0.6$ ; b) Em  $q/q_d = 1.0$ .

Como se pode verificar, à medida que a carga vai aumentando, o betão vai perdendo a sua capacidade resistente em determinadas regiões [Figura 35] devido às extensões transversais de tração. Estas perdas começam a ser notáveis a partir de  $q/q_d = 0.6$ , sendo significativas na zona do recobrimento da face superior da viga, no canto reentrante junto ao apoio e na região em que as escoras encaminham a carga pela armadura inclinada. Quando se chega à carga de dimensionamento ( $q/q_d = 1$ ), as tensões atuantes na zona do recobrimento são iguais às tensões resistentes, conduzindo à necessidade de baixar a linha neutra e, conseqüentemente, um acréscimo de força na armadura horizontal sobre o apoio. Por fim, salienta-se que os ensaios efetuados a vigas com degrau mostram, por diversas vezes, o destacamento do betão de recobrimento naquela zona, o que está em consonância com a análise numérica efetuada.

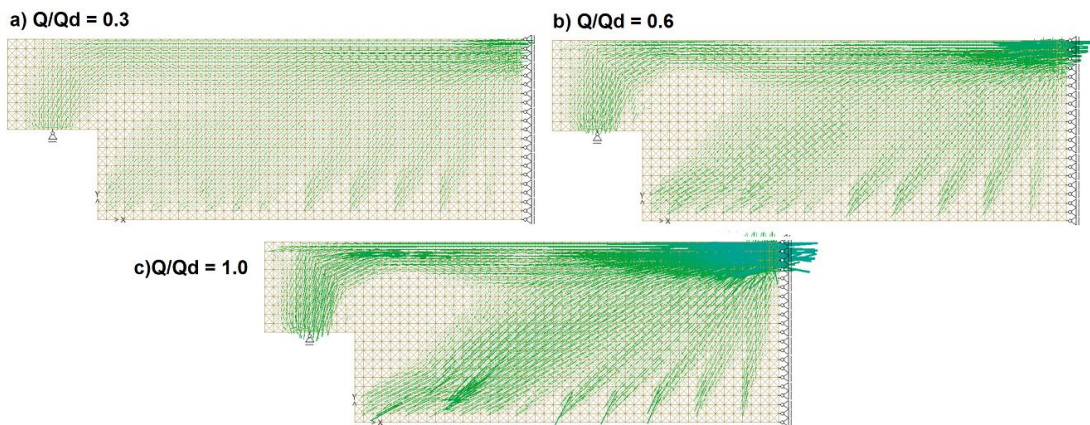


Figura 36- Tensões atuantes no betão nos incrementos ( $k_d = 0.25$ ): a)  $q/q_d = 0.3$ ; b)  $q/q_d = 0.6$ , c)  $q/q_d = 1.0$ .

Analisando a Figura 36, vê-se que o encaminhamento das cargas na estrutura segue a trajetória esperada com redistribuições internas coerentes com a distribuição de armaduras. Este aspecto é evidente na variação de inclinação das compressões no apoio e nas que concorrem na parte inferior da armadura inclinada.

### 3.3.2 Modelo 1 ( $k_d = 0.5$ )

A distribuição de forças neste modelo é feita considerando  $k_d = 0.5$  em que 50% (250kN) da carga total (500kN) é equilibrada pelas armaduras ortogonais e os restantes 50% (250kN) pelas armaduras inclinadas. O modelo de escoras e tirantes resultante desta distribuição pode ser observado na figura a seguir [Figura 37].

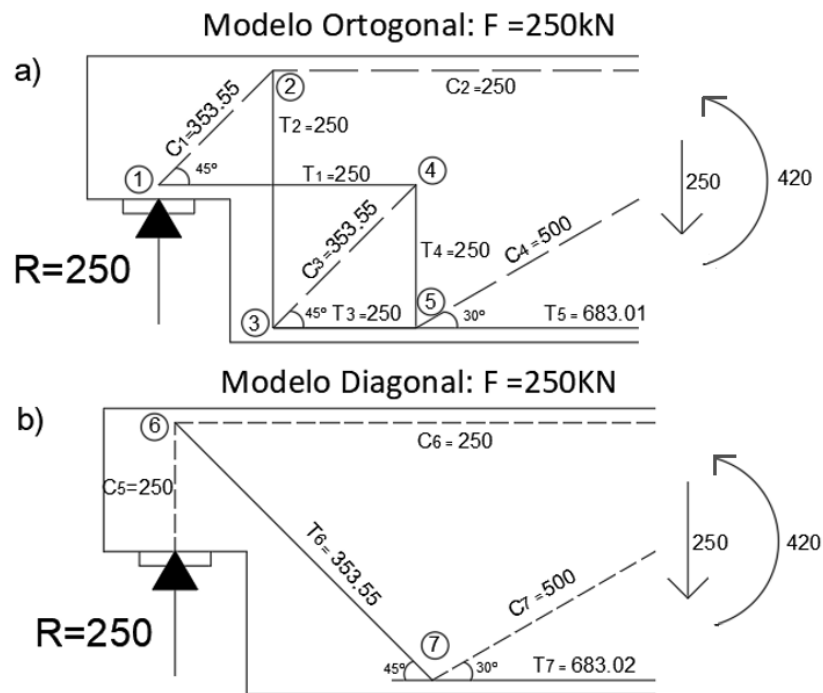


Figura 37 - Modelo de escoras e tirantes ( $k_d = 0.5$ ): a) Ortogonal; b) Diagonal.

#### 3.3.2.1 Cálculos de dimensionamento

O cálculo das forças no M.E.T e das áreas de armadura nos tirantes  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_4$ ,  $T_6$ , que são as únicas áreas que variam de modelo para modelo, foi realizado usando as fórmulas aplicadas no modelo de referência, chegando aos valores apresentados na Figura 37 e na Tabela 3, respetivamente.

Tabela 3 - Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 0.50$ ).

Área de armadura necessária		Varões escolhidos
Concentrada ( $\text{cm}^2$ )		( $\text{cm}^2$ )
T1 ou T2	5.75	6 $\phi$ 12 (6.79)
T6	8.13	3 $\phi$ 20 (9.42)
Distribuída ( $\text{cm}^2/\text{m}$ )		( $\text{cm}^2/\text{m}$ )/face
T4	7.18	$\phi$ 10/0.15 (5.24)

Na figura a seguir [Figura 38], faz – se uma pormenorização meramente ilustrativa das armaduras, para a modelação da estrutura em elementos finitos.

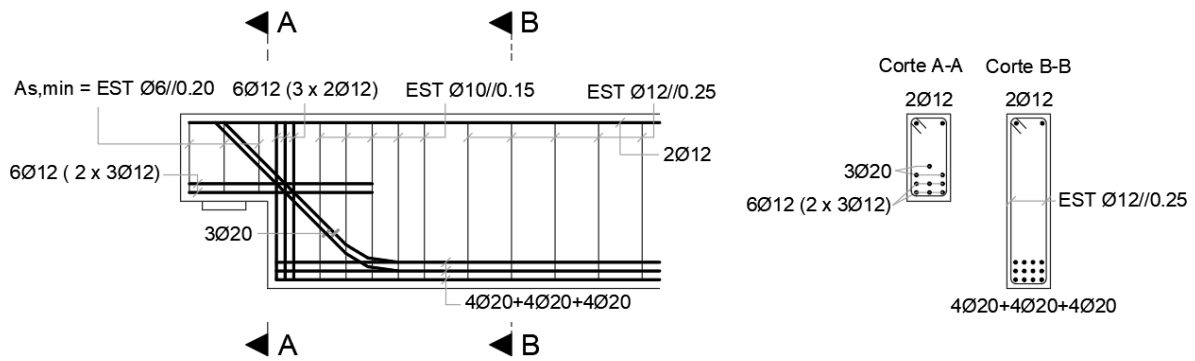


Figura 38 - Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 0.50$ ).

### 3.3.2.2 Análise de Resultados

Nesta fase, foi simulado e analisado o comportamento da viga através de elementos finitos no programa EvalS, tendo em conta as condições estabelecidas anteriormente e a pormenorização indicada.

Nota: As figuras que mostram as forças nas armaduras em incrementos de carga diferentes são mostradas no Anexo B.

Através dos resultados obtidos do programa, avaliou – se a tensão nos tirantes a cada incremento de carga, como se pode ver nas Figuras 39, 40, 41 e 42.

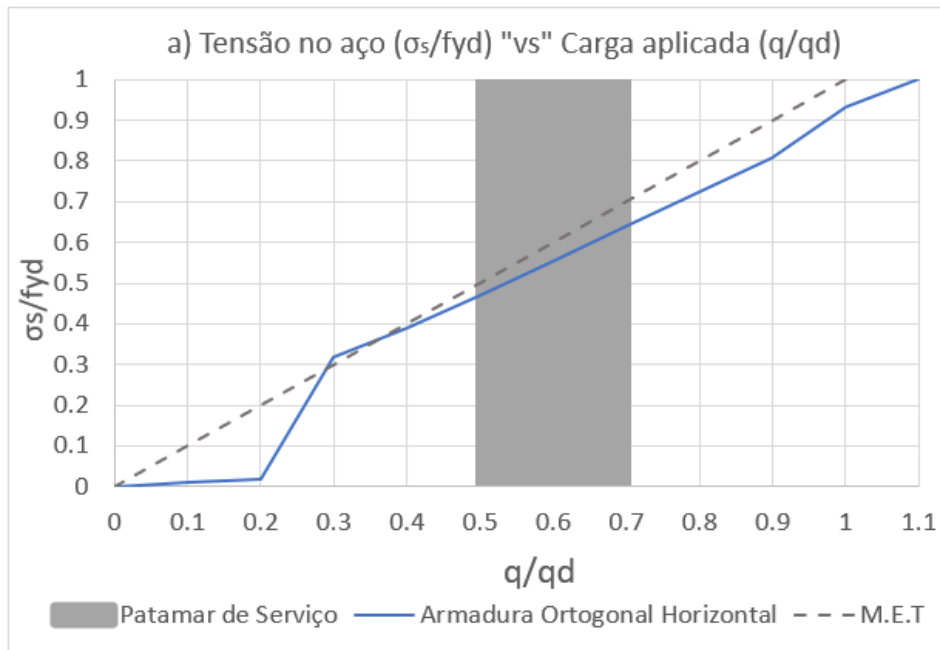


Figura 39 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 0.5$ ).



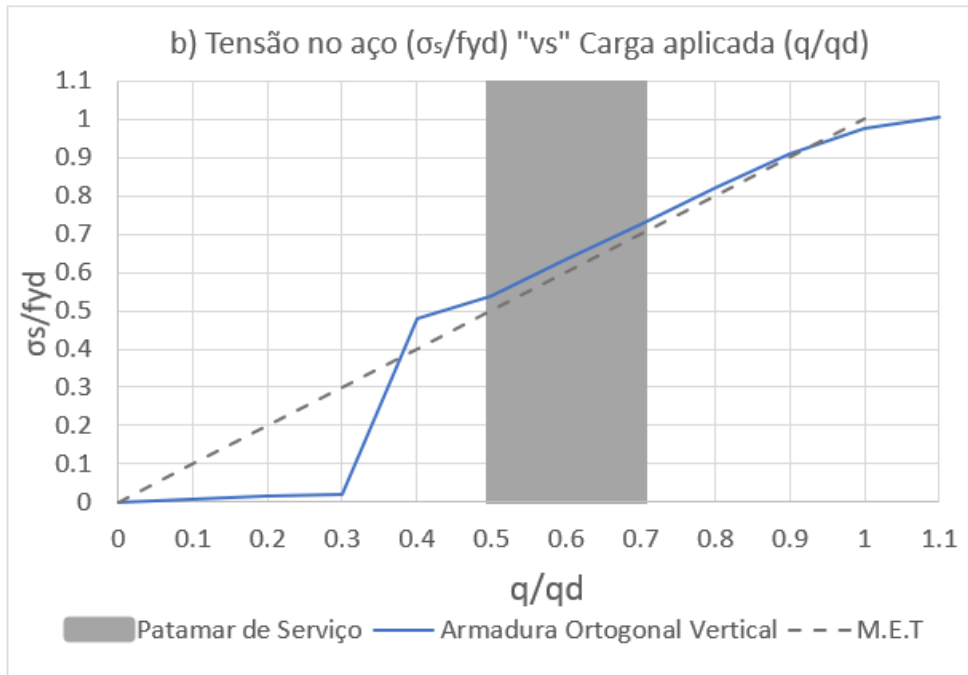


Figura 40 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 0.5$ ).

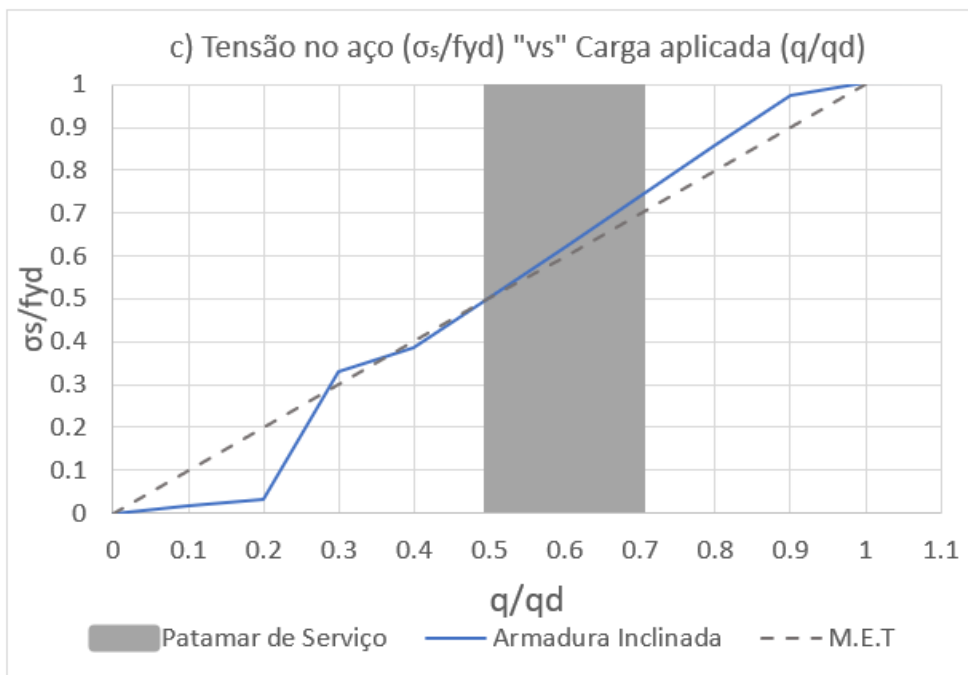


Figura 41 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 0.5$ ).

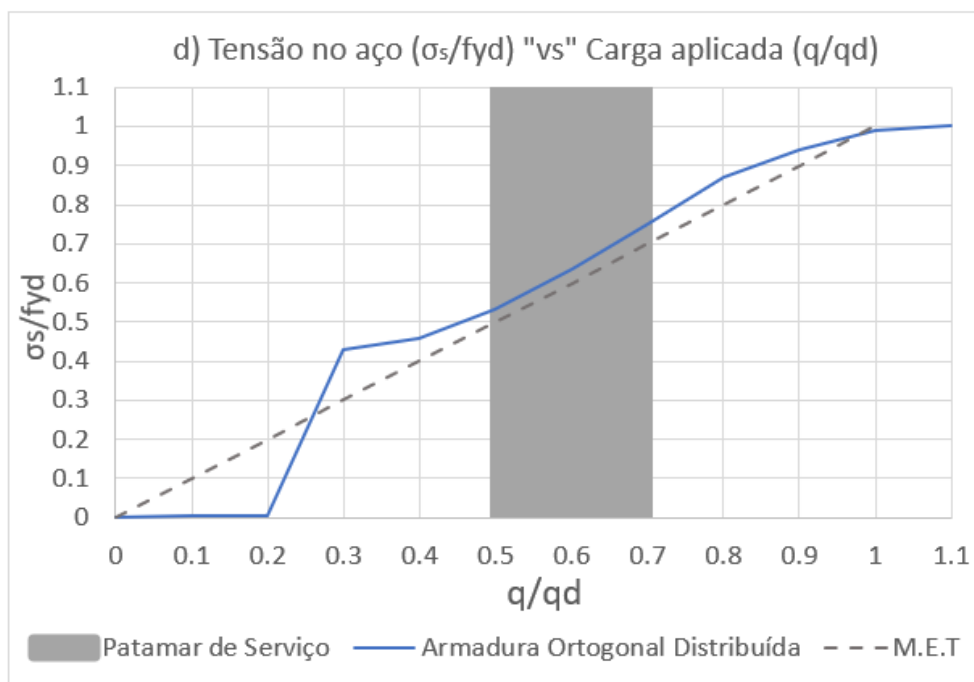


Figura 42 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $k_d = 0.5$ ).

A armadura ortogonal horizontal apresenta níveis de tensão entre 205MPa à 278MPa. No caso das armaduras ortogonal vertical, distribuída e inclinada, estas apresentam tensões de 234MPa à 316MPa, 231MPa à 316MPa e 219MPa à 321MPa, respetivamente.

Em suma, neste modelo ( $k_d = 0.5$ ), todas as armaduras apresentam um comportamento em serviço adequado, embora sejam atingidas tensões que rondam os 300 MPa, para o limite superior das cargas de serviço, o que pode conduzir a aberturas de fendas entre 0.30mm a 0.35mm.

As conclusões relativas à perda da resistência do betão neste modelo, são semelhantes às do modelo de referência, com exceção da zona de transição da armadura longitudinal para armadura inclinada, que neste caso, mantém-se sem chegar a rotura, como se pode se ver nas Figuras 43 e 44. Esta diferença acontece pelo facto do encaminhamento de carga já não ser maioritariamente feito pela armadura inclinada, havendo menos concentração de tensões nessa região.

Da mesma forma que na perda da resistência do betão, a análise das tensões atuantes na estrutura leva a conclusões semelhantes às do modelo de referência. Em que a tensão atuante é igual à resistente no betão de recobrimento da face superior da viga, causando uma concentração de tensões imediatamente abaixo desta zona. As imagens relativas a estas tensões encontram-se no Anexo B.

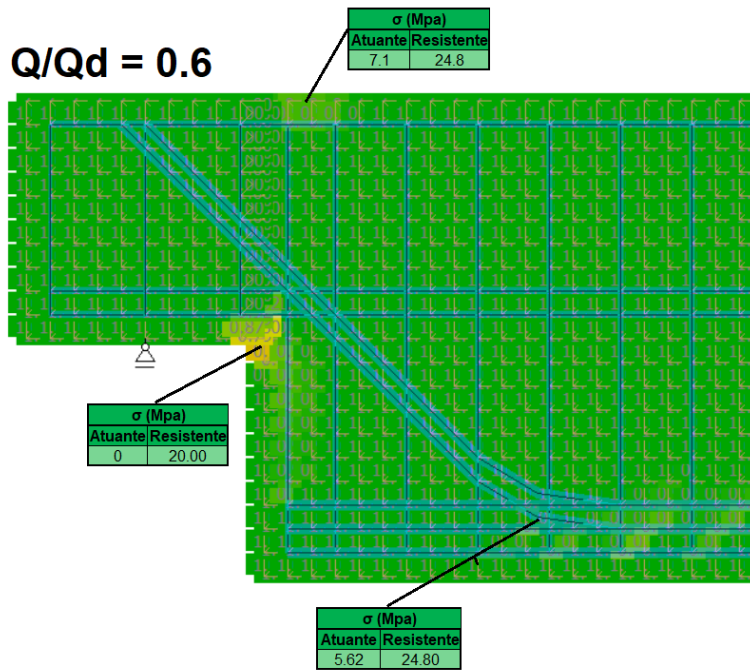


Figura 43 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.5$ ) em  $q/q_d = 0.6$ .

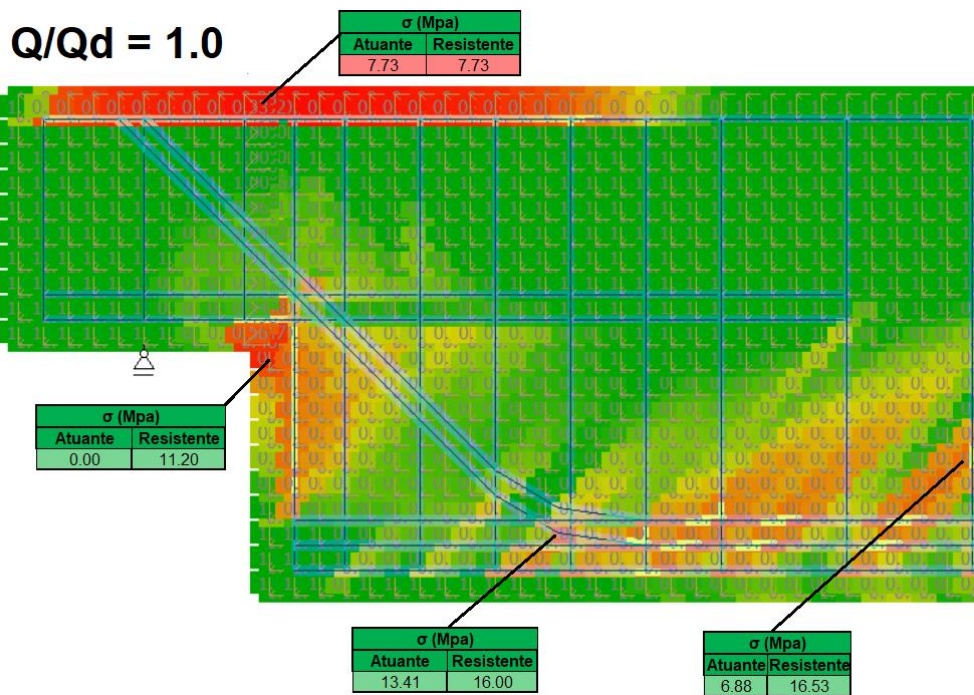


Figura 44 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.5$ ) em  $q/q_d = 1.0$ .

### 3.3.3 Modelo 2 ( $k_d = 0.75$ )

Neste modelo, considera-se  $k_d = 0.75$ , em que 75% (375kN) da carga total (500kN) é equilibrada pelas armaduras ortogonais e os restantes 25% (125kN) pelas armaduras inclinadas. O modelo de escoras e tirantes resultante desta distribuição pode ser observado na Figura 45.

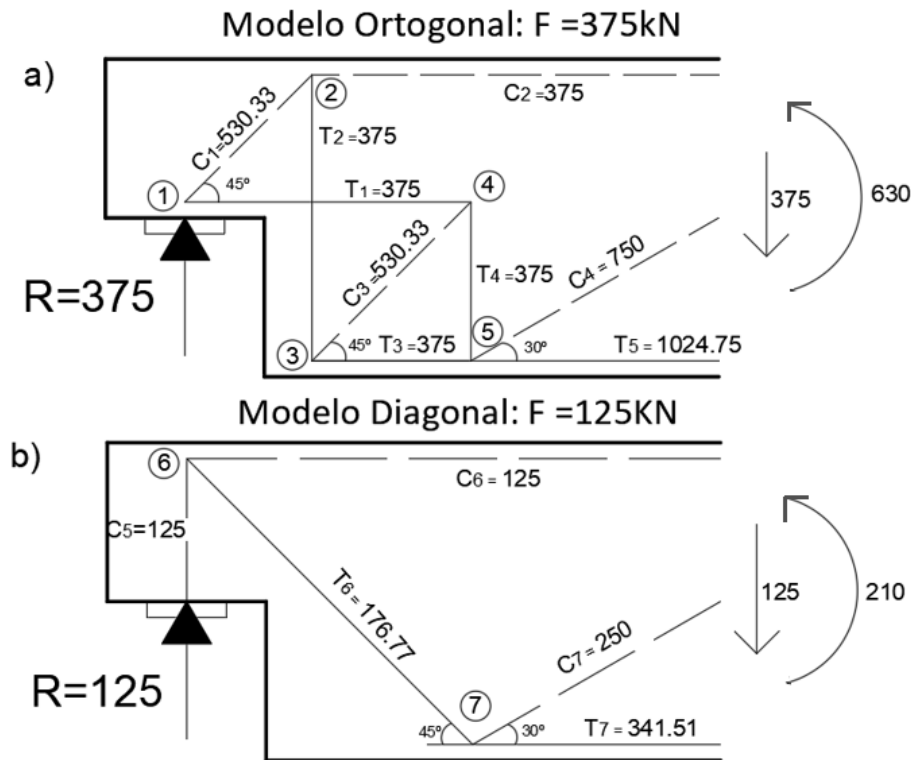


Figura 45 - Modelo de escoras e tirantes ( $k_d = 0.75$ ): a) Ortogonal; b) Diagonal.

#### 3.3.3.1 Cálculos de dimensionamento

O equilíbrio nos nós e as áreas de armadura nos tirantes T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>6</sub>, T<sub>4</sub>, foram obtidos usando as fórmulas aplicadas no modelo de referência, chegando aos valores apresentados na Figura 45 e na Tabela 4, respetivamente.

Tabela 4 - Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 0.75$ ).

Área de armadura necessária		Varões escolhidos
Concentrada (cm <sup>2</sup> )		(cm <sup>2</sup> )
T1 ou T2	8.625	6Ø16 (12.06)
T6	4.1	2Ø20 (6.28)
Distribuída (cm <sup>2</sup> /m)		(cm <sup>2</sup> /m)/face
T4	10.78	Ø12//0.15 (7.54)

Na Figura 46, faz-se uma pormenorização meramente ilustrativa das armaduras para a modelação da estrutura em elementos finitos.

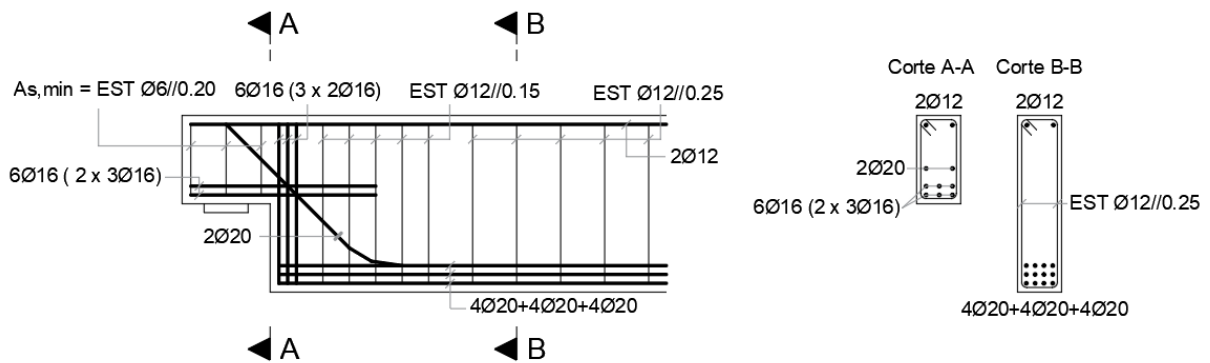


Figura 46 - Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 0.75$ ).

### 3.3.3.2 Análise de Resultados

O modelo foi simulado e de seguida fez-se uma análise ao comportamento da viga através de elementos finitos no programa EvalS, tendo em conta a pormenorização indicada.

As figuras que mostram as forças nas armaduras em incrementos de carga diferentes são apresentadas no Anexo C.

Através dos resultados obtidos do programa, avaliou-se a tensão nos tirantes a cada incremento de carga, como se pode ver nas Figuras 47, 48, 49, 50.

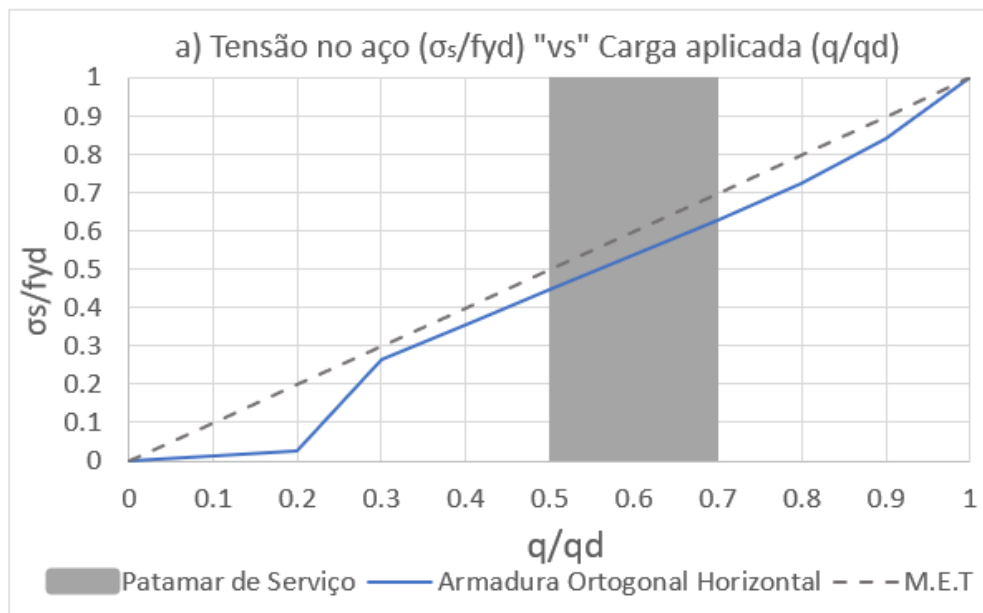


Figura 47 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 0.75$ ).

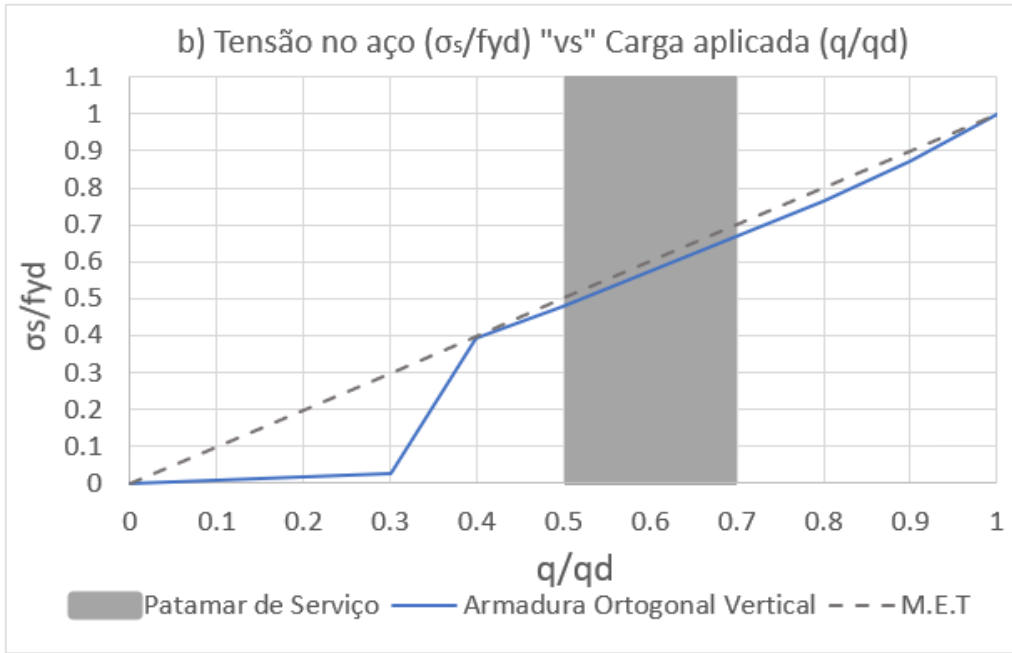


Figura 48 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 0.75$ ).

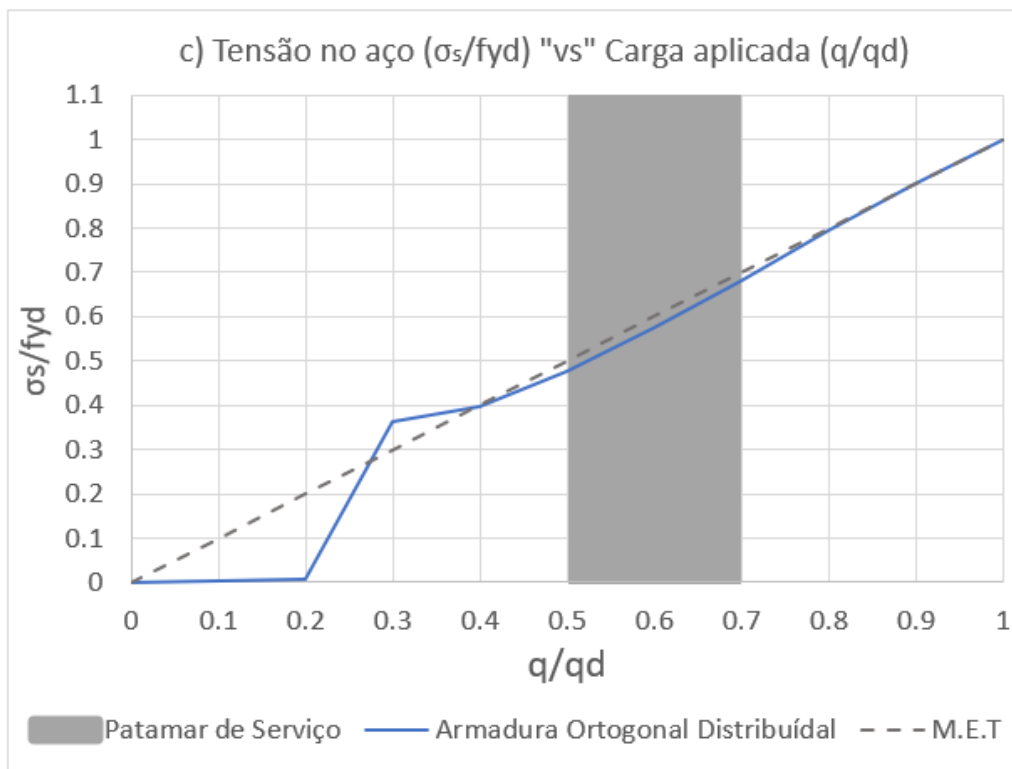


Figura 49 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $k_d = 0.75$ ).

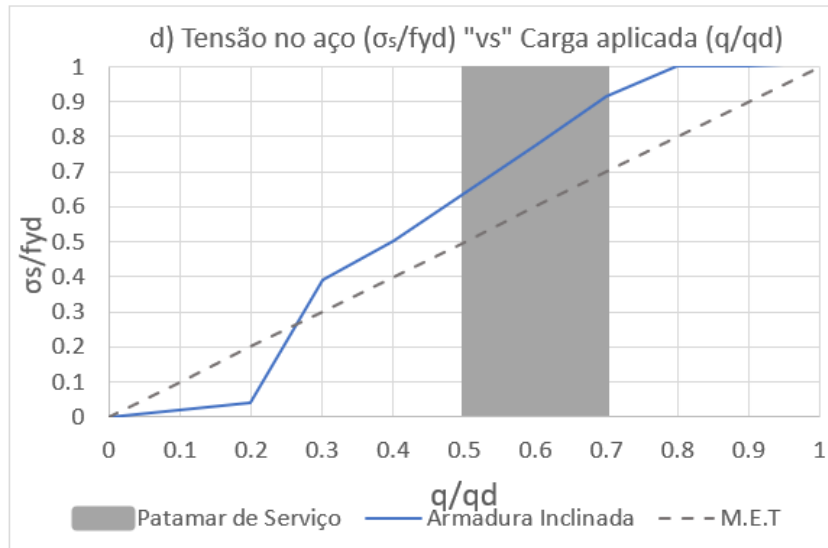


Figura 50 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $kd = 0.75$ ).

Neste caso, todas as armaduras ortogonais (horizontal, vertical e distribuída) apresentam tensões moderadas de 195MPa à 273MPa, 209MPa à 290MPa e 207MPa à 297MPa, respetivamente. No entanto, a armadura inclinada apresenta tensões entre 278MPa e de 399MPa, na região de serviço, o que indicia uma abertura de fendas elevada e, conseqüentemente, um comportamento em serviço inadequado.

No que respeita à comparação das compressões atuantes no betão com as resistentes, já tendo em consideração a redução de resistência devido às extensões transversais, são apresentadas nas Figuras 51 e 52 esses gráficos.

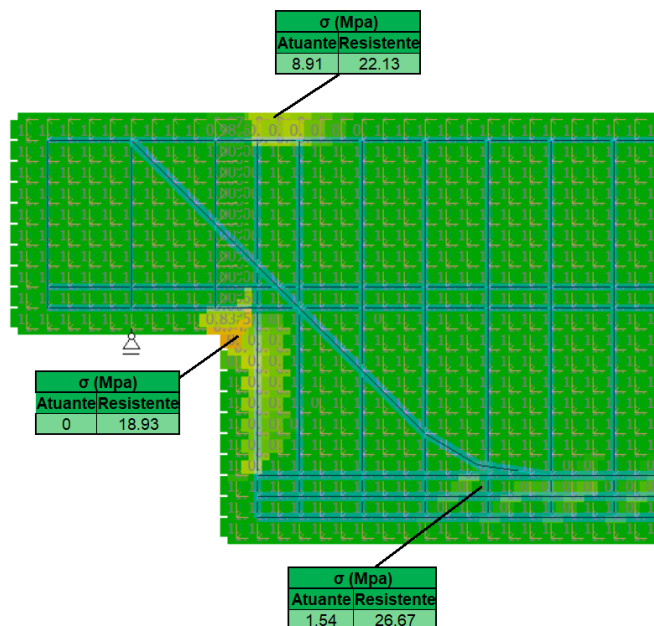


Figura 51 - Redução da resistência do betão ( $kd = 0.75$ ) em  $q/qd = 0.6$ .

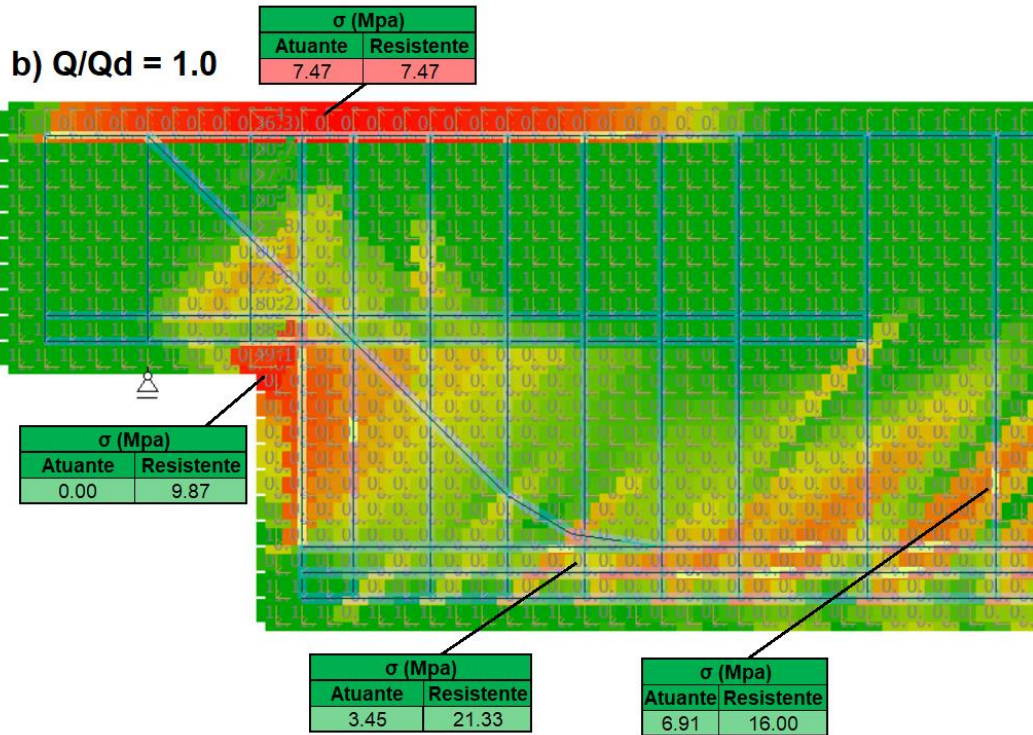


Figura 52 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.75$ ) em  $q/q_d = 1.0$ .

As tensões atuantes na estrutura são bastante semelhantes às dos outros modelos e encontram-se disponíveis no Anexo C e as conclusões são igualmente semelhantes.



### 3.3.4 Modelo 3 ( $k_d = 1$ )

Neste modelo, considera-se  $k_d = 1.0$ , em que a carga total (500kN) é equilibrada apenas pelas armaduras ortogonais. O modelo de escoras e tirantes resultante desta distribuição pode ser observado na Figura 53.

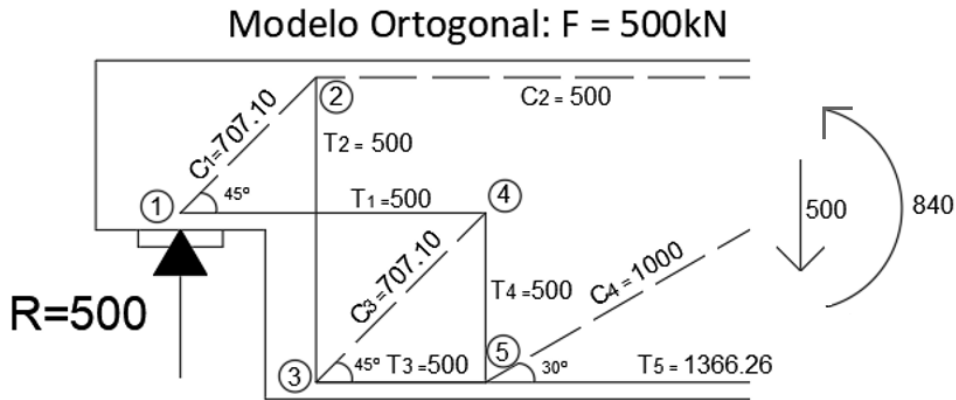


Figura 53 - Modelo de escoras e tirantes Ortogonal ( $k_d = 1.0$ ).

#### 3.3.4.1 Cálculos de dimensionamento

Através das forças encontradas [Figura 53], foram obtidas as respectivas áreas de armadura que são exibidas na Tabela 5 e no pormenor da Figura 54.

Tabela 5 - Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 1.0$ ).

Área de armadura necessária		Varões escolhidos
Concentrada ( $\text{cm}^2$ )		( $\text{cm}^2$ )
T1 ou T2	11.5	4Ø20 (12.57)
T6	-	-
Distribuída ( $\text{cm}^2/\text{m}$ )		( $\text{cm}^2/\text{m}$ )/face
T4	14.375	Ø12//0.15 (7.54)

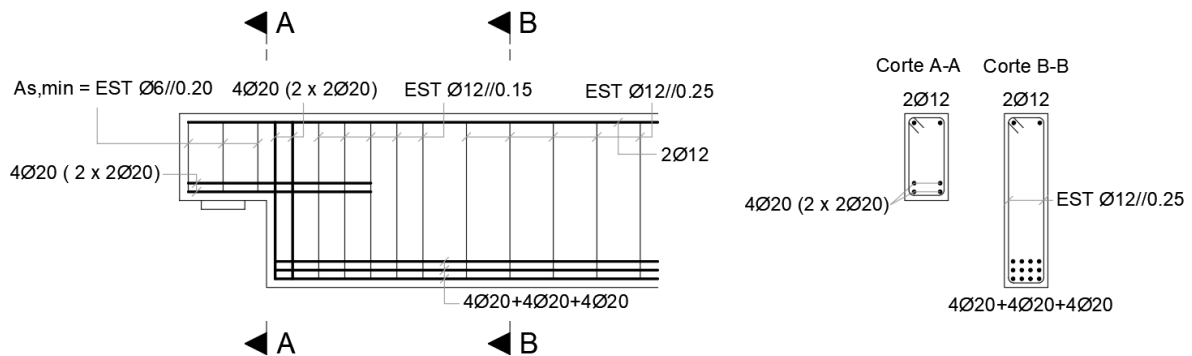


Figura 54 - Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 1.0$ ).

### 3.3.4.2 Análise de Resultados

Após a simulação do modelo, obtiveram-se resultados relevantes a serem discutidos, nomeadamente, a tensão nas armaduras e a redução da resistência do betão devido às tensões transversais.

As variações das tensões em cada armadura encontram-se representadas nas Figuras 55, 56 e 57.

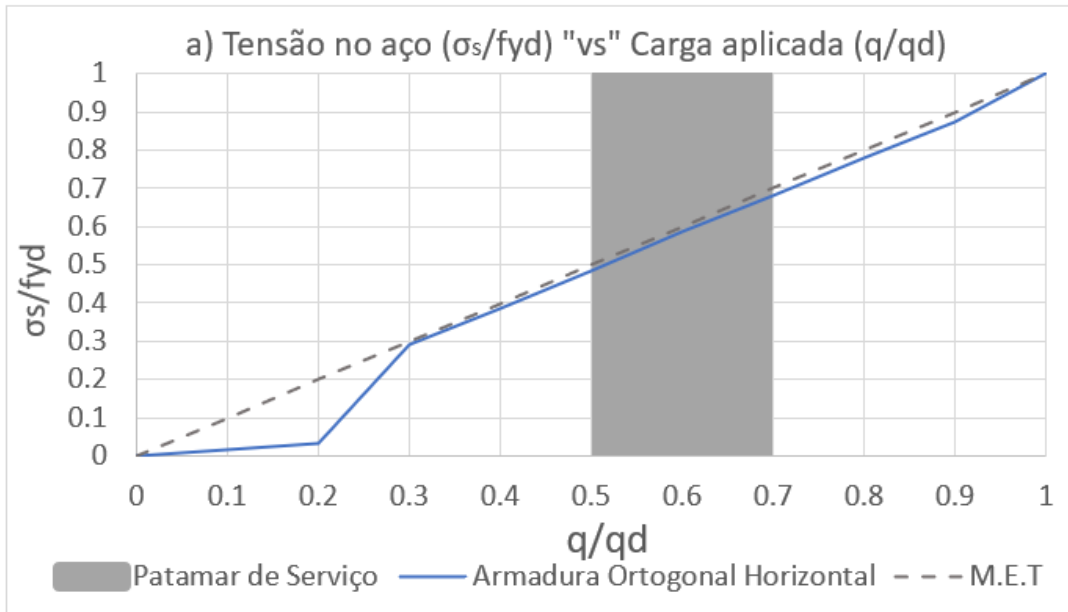


Figura 55 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 1$ ).

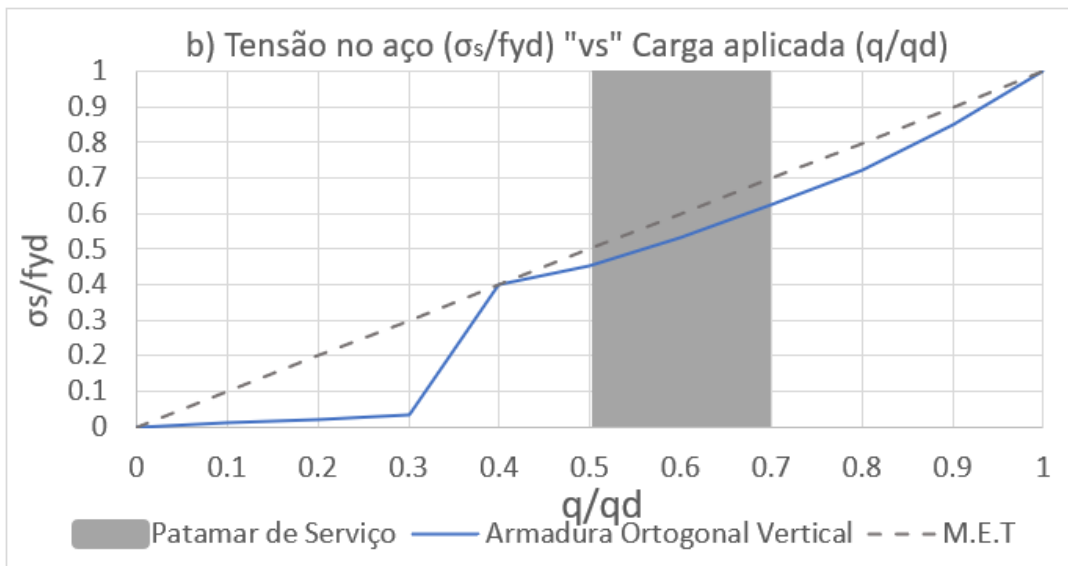


Figura 56 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $k_d = 1.0$ ).

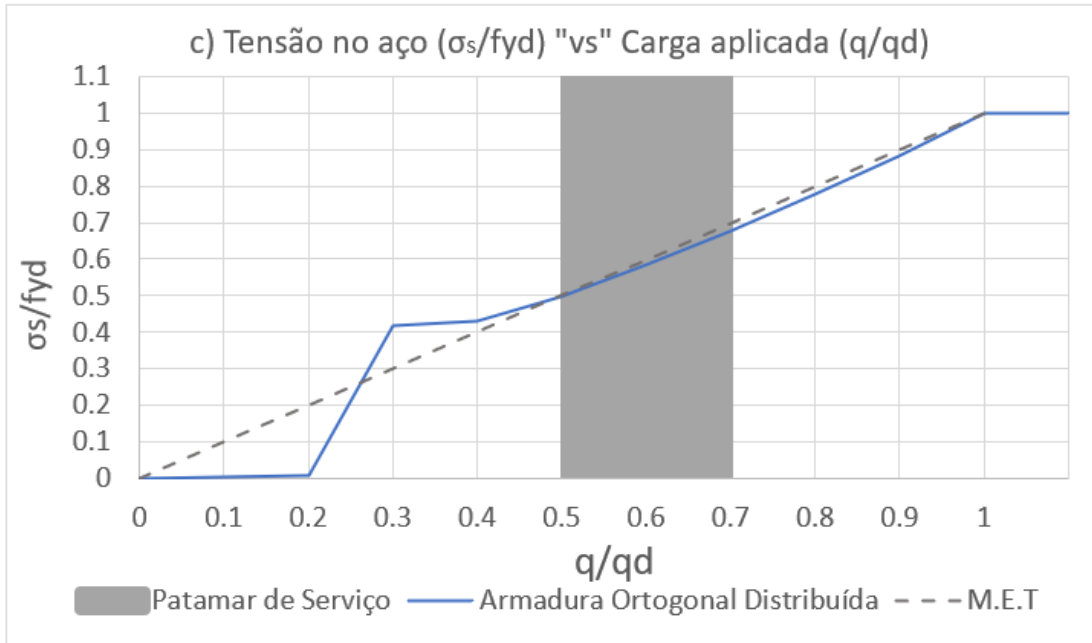


Figura 57 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $k_d = 1.0$ ).

De acordo com os valores obtidos, todas as armaduras do modelo ortogonal apresentam tensões moderadas, chegando a valores dentro dos limites estabelecidos, tendo-se obtido:

- Armadura Ortogonal Horizontal: 211MPa à 297MPa;
- Armadura Ortogonal Vertical: 198MPa à 271MPa;
- Armadura Ortogonal Distribuída: 216MPa à 295MPa;

Apesar das tensões nas armaduras indicarem tensões aceitáveis podem não refletir a possível abertura de fendas inclinada. Logo, foi incluída no modelo uma armadura inclinada suficientemente pequena ( $0.02\text{cm}^2$ ), para não contribuir no encaminhamento de cargas, de modo “medir” indiretamente a extensão no aço ao longo de cada incremento de carga, como se pode ver na Figura 58.

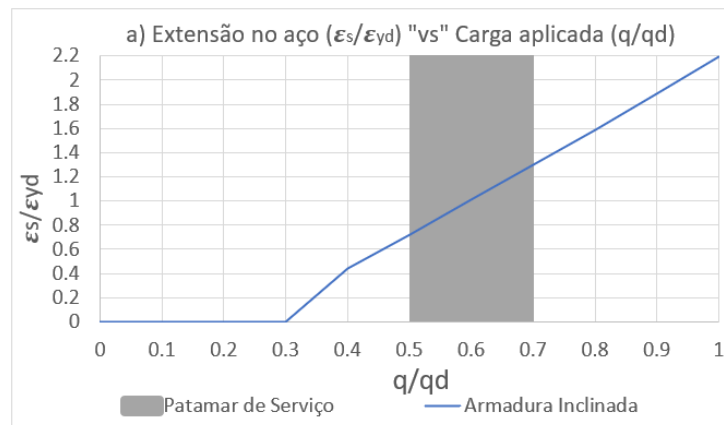
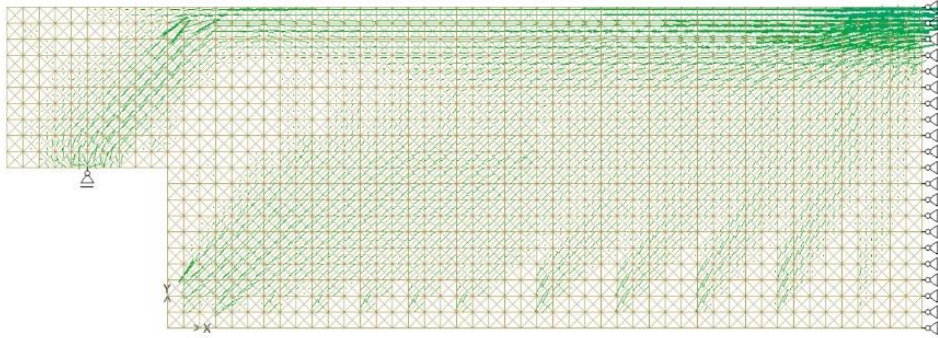


Figura 58 - Níveis de extensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 1.0$ ).

Pelo que se pode verificar, a extensão do aço em serviço está entre  $0.72\varepsilon_{yd}$  à  $1.3\varepsilon_{yd}$ , onde  $\varepsilon_{yd}$  é a extensão de cedência do aço A500 ( $2.18 \cdot 10^{-3}$ ). Este nível de extensão, é um grande indicador de que em serviço existe uma grande abertura de fendas no betão na zona do canto reentrante e de que apesar das armaduras ortogonais terem tensões moderadas, não está a controlar eficazmente a fenda.

Na figura a seguir, são mostradas as tensões atuantes no betão [Figura 59].

a)  $Q/Q_d = 0.6$



b)  $Q/Q_d = 1.0$

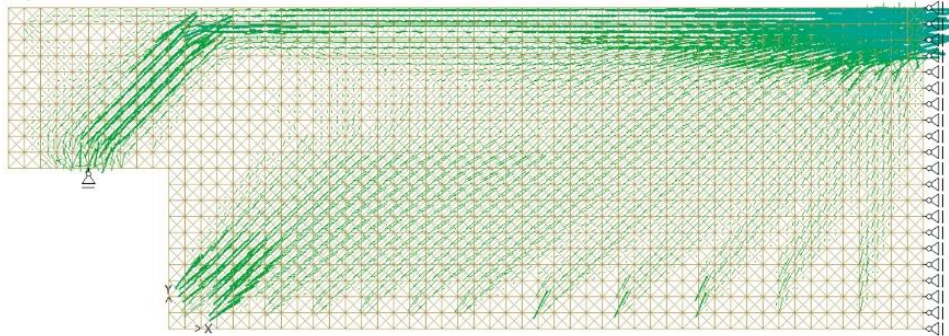


Figura 59 - Tensões atuantes no betão nos incrementos: a)  $q/q_d = 0.6$ ; b)  $q/q_d = 1.0$ .

Analisando as figuras acima, é possível verificar que existe uma grande concentração de tensões na zona em que as escoras transmitem as cargas pela armadura ortogonal vertical. Isto faz com que ao fim do incremento  $q/q_d = 1.0$ , esta zona esteja em rotura, diferente do que acontecia nos restantes modelos [Figura 60.b)].

Outra particularidade, consiste no fato da carga do apoio ser encaminhada na diagonal diretamente para os estribos na zona reentrante, á semelhança do modelo de dimensionamento de escoras e tirantes como pode ser observado pelas Figuras 60 e 61.

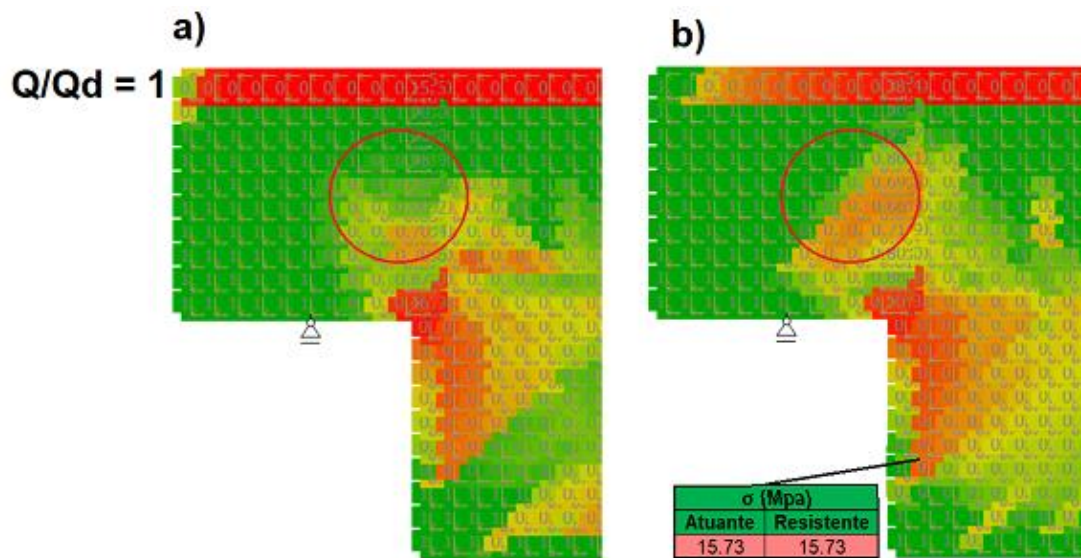


Figura 60 - Redução da resistência do betão ( $q/q_d = 1.0$ ): a) Em  $kd = 0.25$ ; b) Em  $kd = 1.0$ .

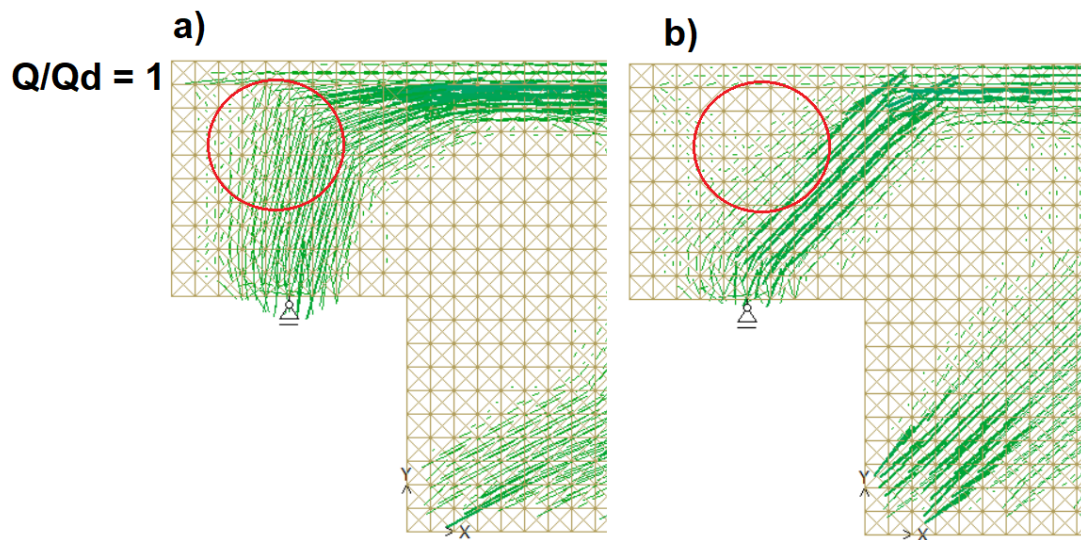


Figura 61 – Tensões atuantes no betão ( $q/q_d = 1$ ): a) Em  $kd = 0.25$ ; b) Em  $kd = 1.0$ .

### 3.3.5 Modelo 4 ( $k_d = 0$ )

Neste modelo, considera – se que a carga total (500kN) é equilibrada apenas pelas armaduras inclinadas. O modelo de escoras e tirantes resultante desta distribuição pode ser observado na Figura 62.

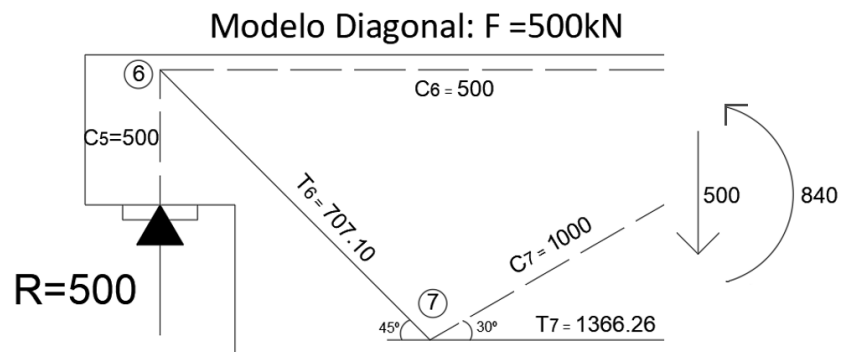


Figura 62 - Modelo de escoras e tirantes diagonal ( $k_d = 0$ ).

#### 3.3.5.1 Cálculos de dimensionamento

Apesar de não existir um modelo de escoras e tirantes ortogonal, é necessário adotar armaduras mínimas de esforço transversal e de flexão. A armadura mínima de esforço transversal é a mesma que a usada nos modelos anteriores e a armadura mínima de flexão para o canto reentrante foi calculada da seguinte forma:

$$A_{s,min}(cm^2) \geq \frac{0.26 \times f_{ctm} \times b_t \times d}{f_{yk}} = \frac{0.26 \times 4.7 \times 0.25 \times 0.45}{500} \times 100^2 \quad (33)$$

$$= 2.75 \text{ cm}^2 \rightarrow 4\phi 10 (3.14 \text{ cm}^2)$$

Onde:

$b_t$  – largura média da zona tracionada em flexão;

$f_{ctm}$  – resistência média do betão a tração;

As restantes armaduras foram calculadas tendo em conta as fórmulas usadas no modelo de referência, encontrando assim os valores da Tabela 6 e a respetiva pormenorização [Figura 63].

Tabela 6 - Resumo das áreas de armadura e varões escolhidos ( $k_d = 0$ ).

Área de armadura necessária		Varões escolhidos
Concentrada ( $cm^2$ )		( $cm^2$ )
Armadura mínima (flexão)	2.28	4 $\phi$ 10 (3.14)
T6	16.26	6 $\phi$ 20 (18.85)
Distribuída ( $cm^2/m$ )		( $cm^2/m$ )/face
Armadura mínima de esforço transversal	2.53	$\phi$ 6//0.20 (1.41)

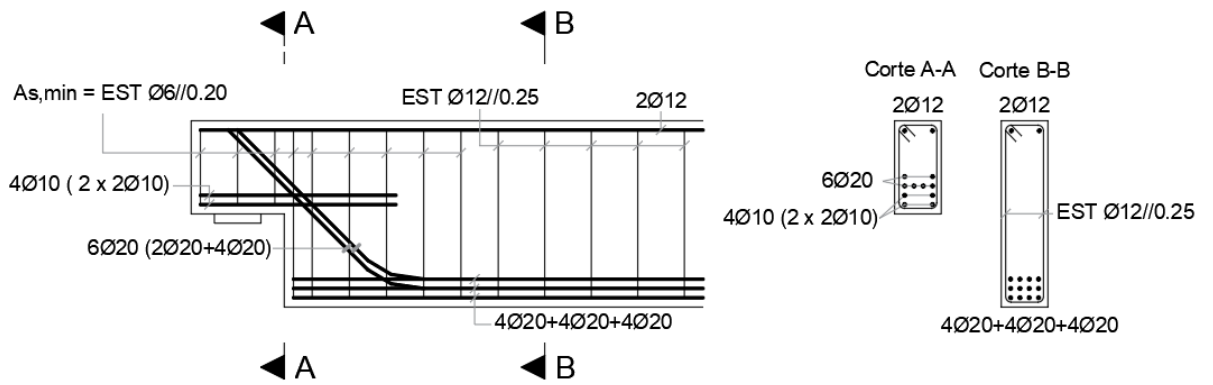


Figura 63 - Exemplo de pormenorização das armaduras ( $k_d = 0$ ).

### 3.3.5.2 Análise de Resultados

Nesta fase, tendo em conta a pormenorização indicada, foi simulado e analisado o comportamento da viga através de elementos finitos no programa EvalS.

As figuras que mostram as forças nas armaduras, as tensões no betão e a redução da resistência do betão nos diferentes incrementos de carga estão apresentadas no Anexo E.

Através dos resultados obtidos do programa, avaliou-se a tensão nos tirantes a cada incremento de carga, como se pode ver nas Figuras 64, 65, 66 e 67.

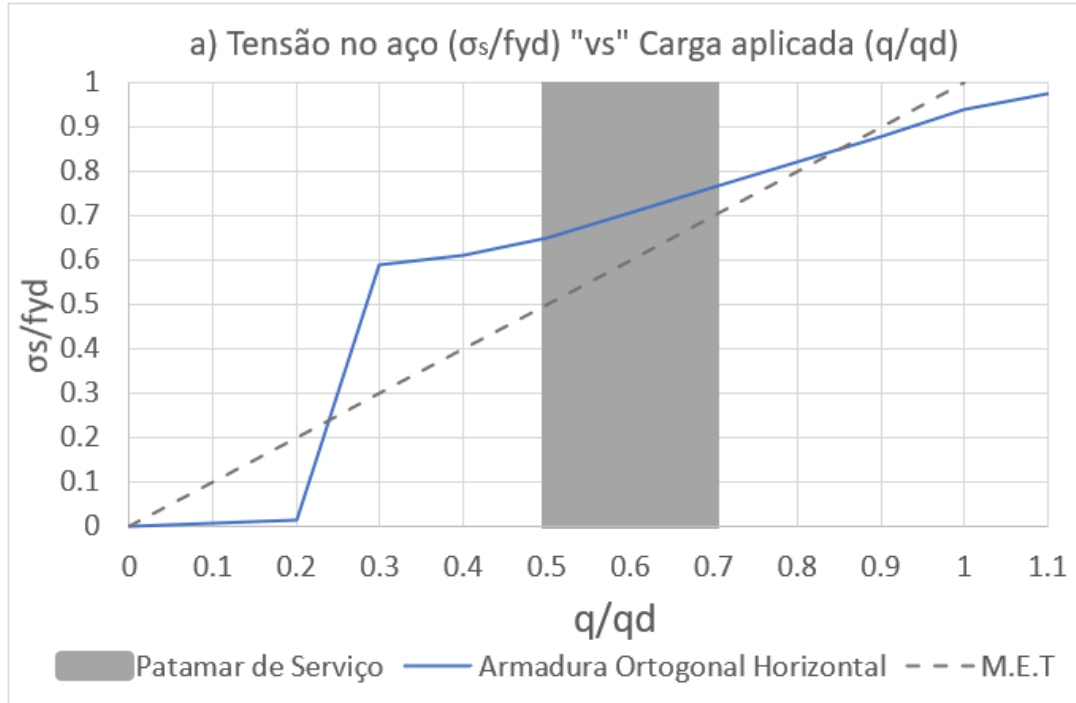


Figura 64 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal horizontal ( $k_d = 0$ ).

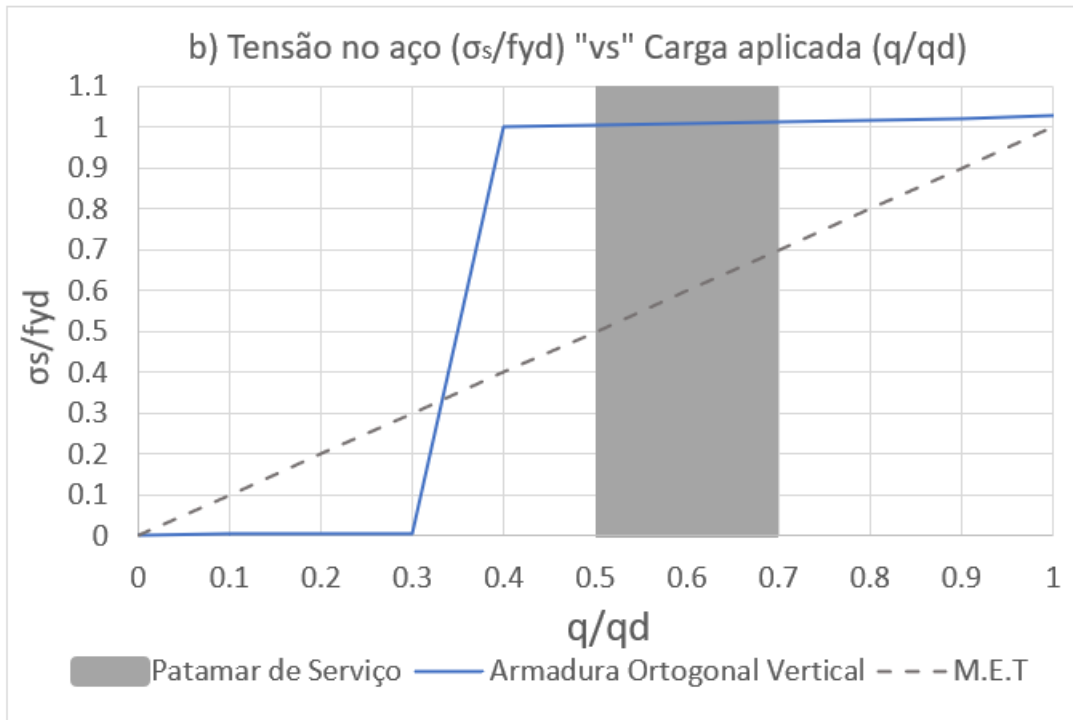


Figura 65 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal vertical ( $kd = 0$ ).

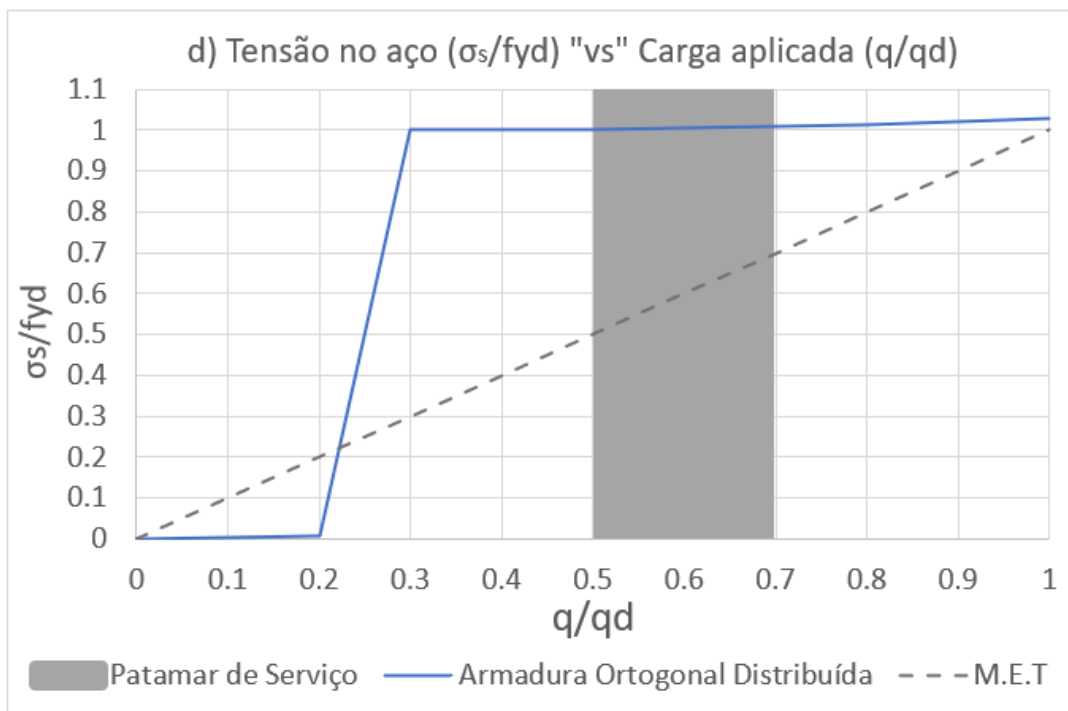


Figura 66 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal distribuída ( $kd = 0$ ).



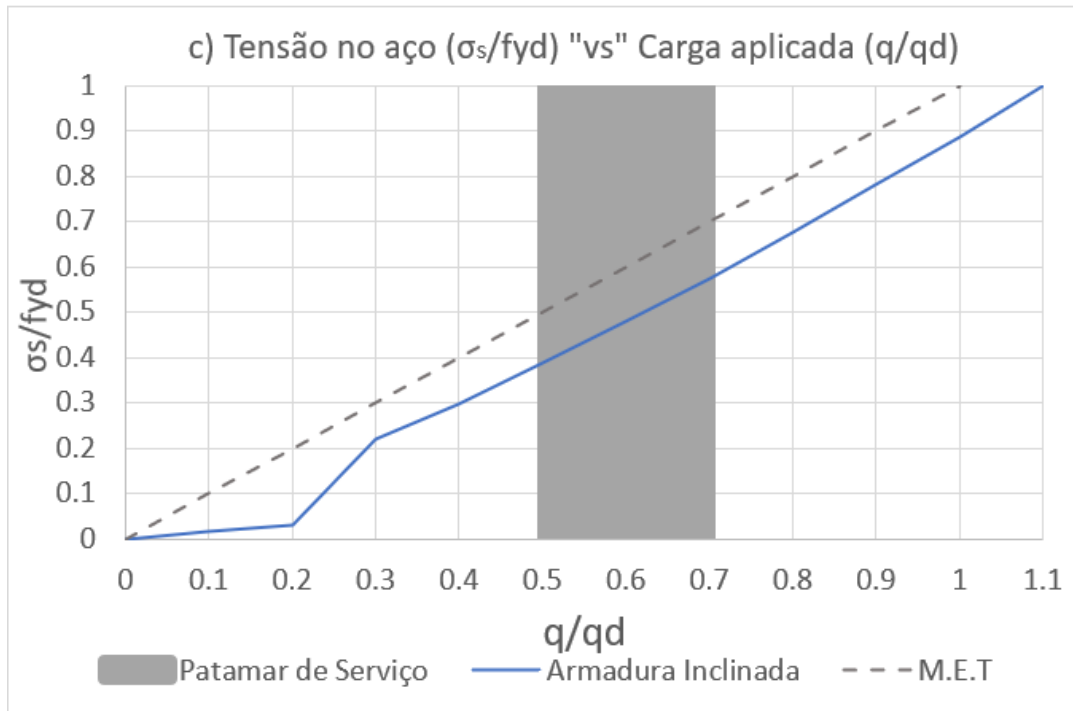


Figura 67 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura inclinada ( $k_d = 0$ ).

Levando em consideração os resultados encontrados, é possível verificar que a armadura ortogonal distribuída e a armadura ortogonal vertical, no patamar de serviço chegam a níveis de tensão muito próximas da tensão de cedência, apresentando assim um mau comportamento. A armadura ortogonal horizontal também tem um comportamento em serviço inadequado, atingindo tensões de 284MPa à 333MPa. Por outro lado, a armadura inclinada, atinge tensões de 169MPa à 249MPa, sendo assim a única que apresenta tensões baixas. Este modelo conduz à conclusão de que, mesmo que a fenda no canto reentrante possa estar devidamente controlada, ocorrerão fendas com aberturas significativas noutras zonas que conduzirão a um inadequado comportamento em serviço.

Relativamente a perda de resistência do betão, as conclusões são semelhantes aos casos anteriores, estando representado na Figura 68.

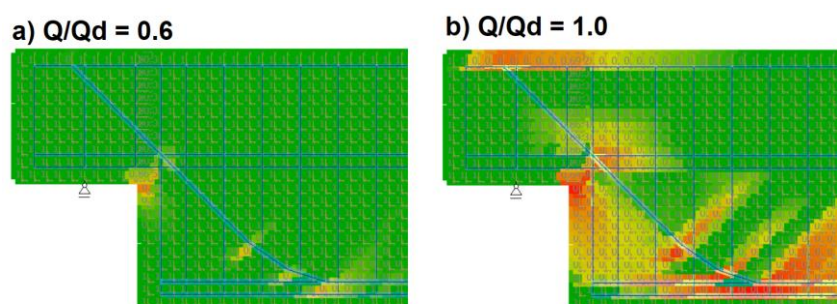


Figura 68 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$ .

### 3.4 Avaliação geral do comportamento dos modelos

Como foi visto através da construção dos modelos estudados, é possível estudar o comportamento em serviço de uma estrutura para diferentes distribuições de armaduras, a fim de saber qual a liberdade na escolha do modelo de dimensionamento. Este tipo de estudo é de extrema importância, pois o comportamento em serviço está diretamente ligado a abertura de fendas. Assim, nas Figuras 69 e 70, são mostrados gráficos com o andamento das tensões a cada passo de carga para cada modelo, de modo a fazer-se uma análise geral.

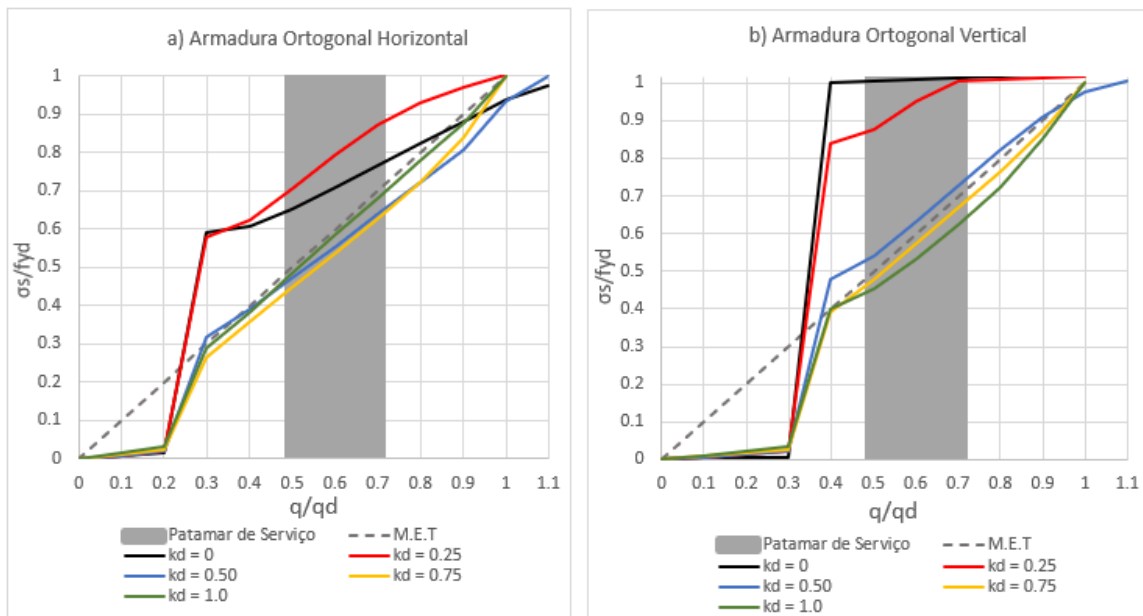


Figura 69 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura ortogonal : a) horizontal; b) vertical

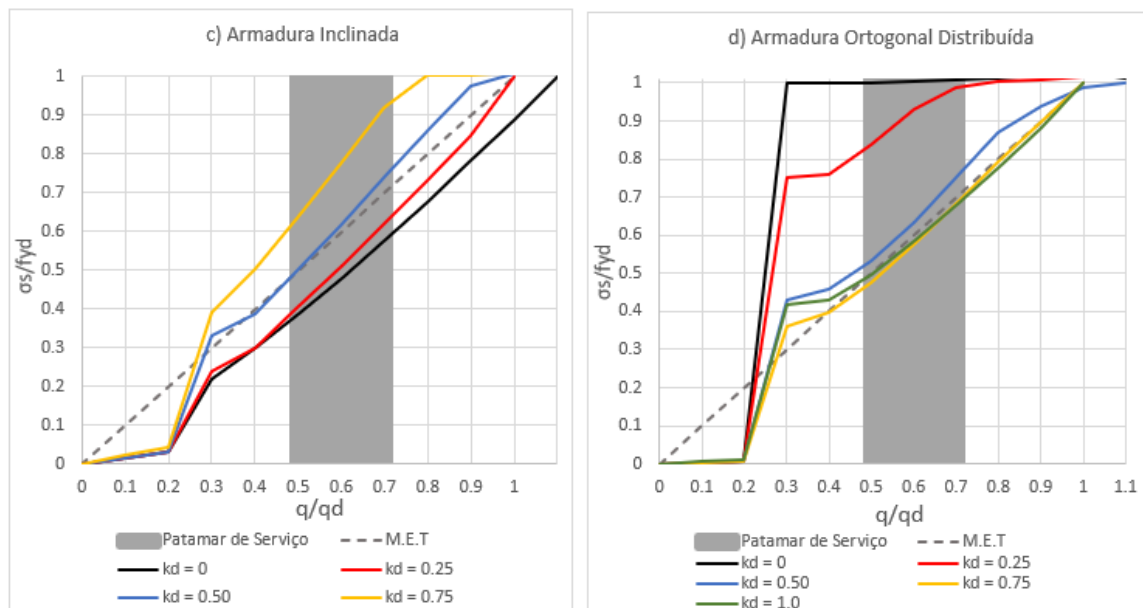


Figura 70 - Níveis de tensão a cada incremento de carga para a armadura: c) inclinada; d) distribuída.

Pela análise dos gráficos, verifica-se que o modelo  $k_d = 0.5$  (metade da carga equilibrada por armadura ortogonal e a outra metade por armadura inclinada) apresentam tensões aceitáveis em todos os tirantes, indicando que é o modelo que apresenta o melhor comportamento em serviço.

O modelo de referência, baseado nas trajetórias elásticas, que indica que 75% da carga deverá ser transmitida pela armadura inclinada, não se revelou o que representa o melhor comportamento em serviço, pois, embora a abertura de fendas esteja adequadamente controlada pela armadura inclinada no canto reentrante, detetaram-se zonas onde as tensões nas armaduras eram elevadas, nomeadamente na armadura ortogonal horizontal e na armadura ortogonal distribuída. Pelo que será expectável a ocorrência de aberturas de fendas elevadas noutras zonas.

Por fim, tendo em consideração que redistribuições intermédias (entre  $k_d = 0.25$  e  $k_d = 0.5$ , por exemplo), devolvem valores de tensões intermédias, é possível concluir que valores entre  $k_d = 0.35$  e  $k_d = 0.65$  conduzem igualmente a comportamentos em serviço aceitáveis. Na figura a seguir [Figura 71], mostram – se os intervalos que garantem este comportamento adequado, estes intervalos são relativos a percentagem da carga que é encaminhada em cada uma das configurações.

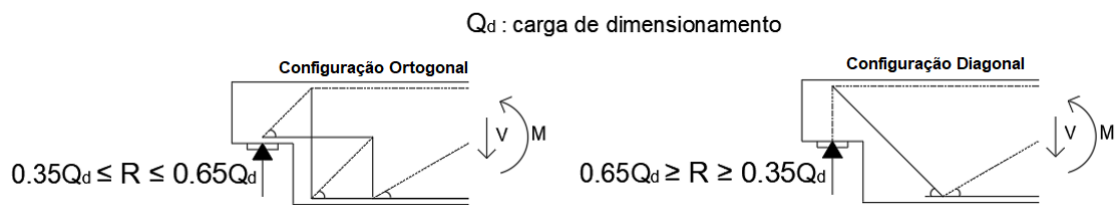


Figura 71 – Intervalos adequados para as duas configurações

Relativamente à redução de resistência do betão, verifica-se que a sua influência no betão de recobrimento na face superior da viga é tanto maior quanto maior é a contribuição da armadura ortogonal [Figura 72]. Como referido anteriormente, nos ensaios experimentais efetuados a vigas com degrau, é corrente observar o destacamento do betão de recobrimento próximo da carga última.

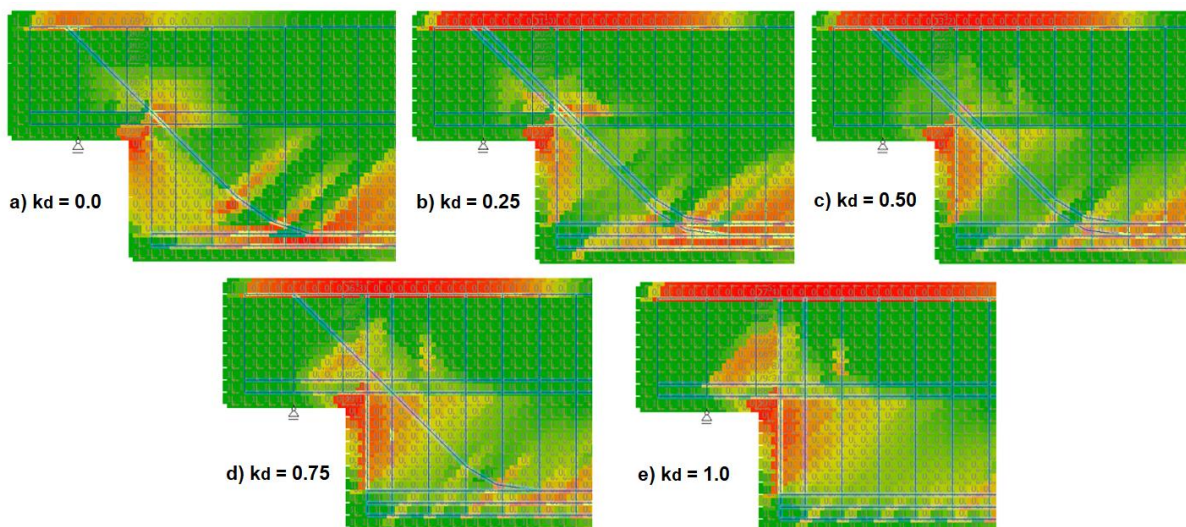


Figura 72 - Redução da resistência do betão ( $q/q_d = 1.0$ ): a)  $k_d = 0$ ; b)  $k_d = 0.25$ ; c)  $k_d = 0.50$ ; d)  $k_d = 0.75$ ; e)  $k_d = 1.0$

## 4. Conclusão

### 4.1 Conclusões gerais

Como é atualmente reconhecido, a utilização de modelos de escoras tirantes constitui uma enorme valia para a verificação da segurança de zonas de descontinuidade em elementos de betão estrutural. No entanto, devido ao grande leque de soluções equilibradas possíveis, podem levantar – se diversas dúvidas relativamente à escolha de modelos adequados. Este facto pode condicionar a confiança dos Engenheiros projetistas e limitar a aplicação mais generalizada do método.

Assim sendo, os estudos referentes a métodos de avaliação e a critérios de seleção de modelos, em geral realizados para situações *típicas* de regiões de descontinuidade, são importantes, porque conduzem a propostas de orientações a considerar na escolha criteriosa dos modelos utilizados no processo de verificação da segurança destas regiões.

No contexto deste trabalho, com recurso à utilização de técnicas de análise não linear pelo MEF, procura - se estudar, para a situação *típica* da viga com degrau, simplesmente apoiada e sujeita a uma carga concentrada à meio vão, as diferentes variações que podem ser consideradas nas configurações de possíveis modelos de dimensionamento, de que resultam quantidades de armaduras, ortogonal e inclinada, diferentes das sugeridas pela solução de referência.

Como principal critério para a avaliação e seleção dos modelos, avaliam-se as tensões nas armaduras para ações correspondentes ao estado limite de utilização, pois estas estão diretamente relacionadas com o seu comportamento em serviço. Como era expectável, foi possível confirmar que, tanto as armaduras ortogonais, como as armaduras inclinadas, apresentam valores de tensões em serviço tanto maiores quanto menor for a sua percentagem de armadura.

Avaliando o comportamento global da estrutura, pela análise conjunta dos níveis de tensão nas armaduras para os vários modelos considerados, é possível verificar que modelos que utilizam essencialmente um dos modelos de equilíbrio principais, apenas armaduras ortogonais ou diagonais ( $k_d = 0$  e  $k_d = 1$ ), são os que apresentam um desempenho mais inapropriado.

Assim, através das análises realizadas, é possível concluir que uma distribuição aproximada das forças entre as duas configurações, garante um comportamento em serviço adequado, tornando-se numa opção válida no dimensionamento deste tipo de regiões de descontinuidade. Este comportamento é inteiramente satisfeito pelo modelo com  $k_d = 0.5$ , em que 50% da carga é encaminhada pela direção ortogonal e o restante pela diagonal. Neste, as perdas de resistência do betão, são menos intensas e menos concentradas em determinadas regiões da estrutura, melhorando assim a sua performance. Por fim, redistribuições de cerca de 30% deste modelo, conduz igualmente a resultados adequados em serviço.

## 4.2 Limitações dos modelos

As limitações encontradas, estão associadas à dificuldade de comparação de resultados obtidos pelos modelos de escoras e tirantes e resultados obtidos pelo método dos elementos finitos. Esta dificuldade, surge pelo facto de, pela natureza do método, os esforços nos modelos de escoras e tirantes serem forças resultantes, ao contrário do que acontece nas análises de elementos finitos, em que as tensões estão distribuídas pelos diferentes elementos. Sendo assim, de modo a facilitar a comparação de resultados, torna - se necessário realizar um conjunto de processos intermédios, que permitam calcular as resultantes das forças através dos valores encontrados pelo método dos elementos finitos.

## 4.3 Desenvolvimento futuro

De modo a proporcionar aos projetistas alguns parâmetros que facilitem a sua tarefa no dimensionamento de estruturas, nesta dissertação foram analisados diversos modelos de escoras e tirantes para vigas com degrau. No entanto, o número de critérios e regras que podem ser estabelecidas, são tanto maiores quanto mais estudos forem realizados relativamente ao assunto. Deste modo, seria relevante realizar-se no futuro, o mesmo tipo de estudo em modelos intermédios, modelos com configurações diferentes, mas próximas da solução mais adequada analisada nesta dissertação. Assim, a avaliação de modelos com  $k_d$  de valor igual a 0.4, 0.45, 0.55, 0.6 e 0.65 poderá ser um bom complemento ao estudo agora apresentado.

# Bibliografia

CAMARA, J.; COSTA, A.; ALMEIDA, J.; JÚLIO, E.; ALFAIATE, J. – Estruturas de Betão - Folhas de Apoio às Aulas, Lisboa

CAMARA, J.; ALMEIDA, J.; COSTA, A. – Concrete Structures II: Classes 20 to 25: Stress field models – Discontinuity (“D”) regions, Lisboa

CEB-FIB: Model Code 1990 – Design Code, 1991

EUROCODE 2 – EN 1992-1-1 – Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, December 2004

FALCÓN, J. – Estudio del comportamiento en servicio y rotura de los apoyos a media madera, España, Junio 2015

FERREIRA, M.; ALMEIDA, J., LOURENÇO, M., 2017 – Modelling structural concrete with strut-and-tie model combined with 2D finite elements - a model factor for the assessment of strut-and-tie models, *fib Symposium 2017*, Maastricht, June 12-14 2017

FIB BULLETIN 56 – Model Code 2010, First complete draft - Volume 2, 2010

FIP – Practical Design of Structural Concrete, September 1999

KOSTIC, N. – Computer-Based Development of Stress Fields, 6th International PhD Symposium in Civil Engineering, Zurich, August 23-26, 2006

LOURENÇO, M. – Adaptive Stress Field Models for Structural Concrete. Tese de doutoramento. Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Fevereiro de 2010

LOURENÇO, M.; ALMEIDA, J. – Adaptive Stress Field Models: Formulation and Validation, *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, Title no.110-S08, January – February 2013

LOURENÇO, M.; ALMEIDA, J. – Adaptive Stress Field Models: Assessment of Design Models, *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, Title no.110-S09, January – February 2013

MUTTONI, A.; SCHWARTZ, J.; THÜRLIMANN, B. – Design of Concrete Structures with Stress Fields, Basel, Boston, Berlin, Birkhauser, 1997

RUIZ, M.; MUTTONI, A. – On Development of Suitable Stress Fields for Structural Concrete, *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, Title no.104-S48, July – August 2007

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. – Toward a Consistent Design of Structural Concrete, *PCI JOURNAL*, May-June 1987

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K. – Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models, *The Structural Engineer*, Volume 69, No.6, 19 March 1991

TJHIN, T.; KUCHMA, D. – Integrated analysis and design tool for the strut-and-tie method, *Engineering Structures* 29: 3042-3052, 2007

VITONE, A.; PALMISANO, F.; VITONE, C. – Load Path Method (LPM) in Detailing Design, *Proceedings of the 2nd International Congress, Session 3 – Modelling and design, Naples, Italy, June 5-8, 2006*

## Anexos

### A. Modelo de referência ( $k_d = 0.25$ )

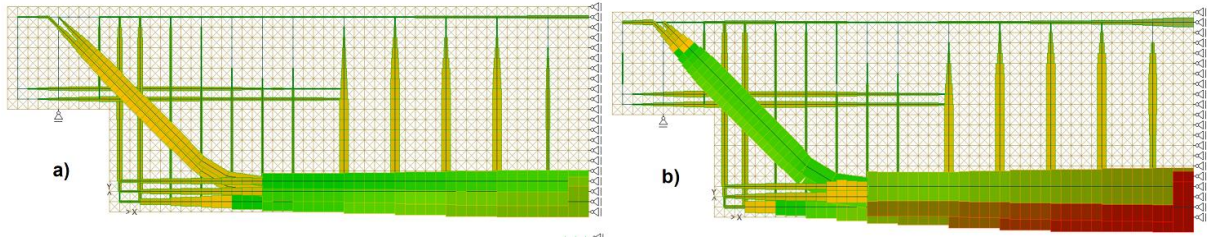


Figura 73 - Forças nas armaduras ( $k_d = 0.25$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$

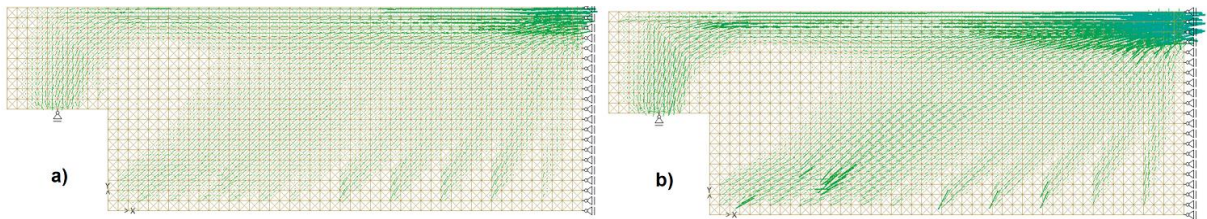


Figura 74 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 0.25$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b)  $q/q_d = 1.0$ .

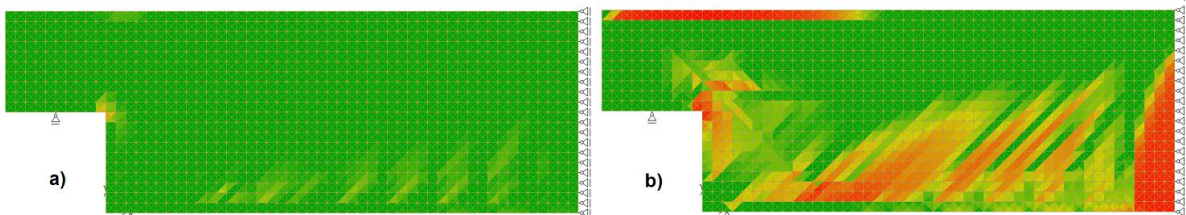


Figura 75 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.25$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$ .

### B. Modelo 1 ( $k_d = 0.5$ )

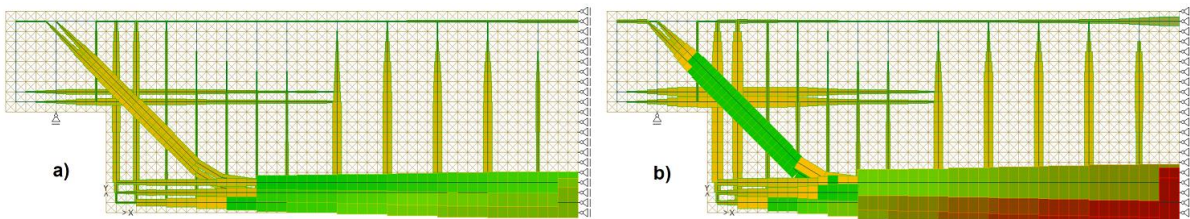


Figura 76 - Forças nas armaduras ( $k_d = 0.5$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$

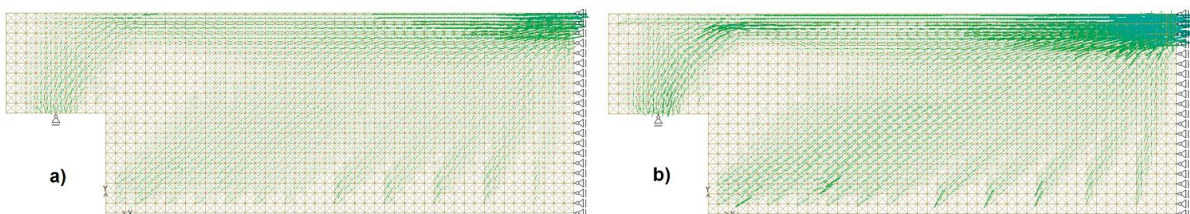


Figura 77 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 0.5$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b)  $q/q_d = 1.0$ .



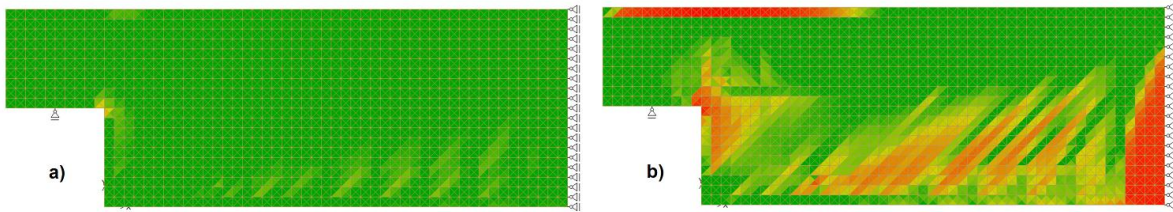


Figura 78 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.5$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$ .

### C. Modelo 2 ( $k_d = 0.75$ )

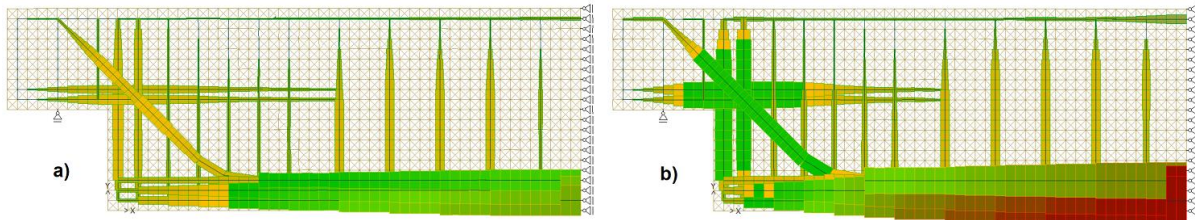


Figura 79 - Forças nas armaduras ( $k_d = 0.75$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$

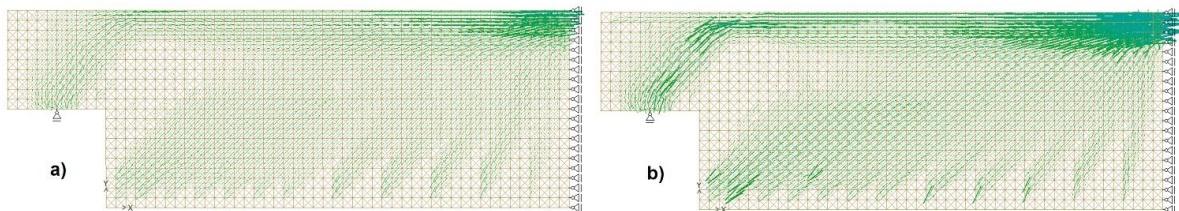


Figura 80 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 0.75$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b)  $q/q_d = 1.0$ .

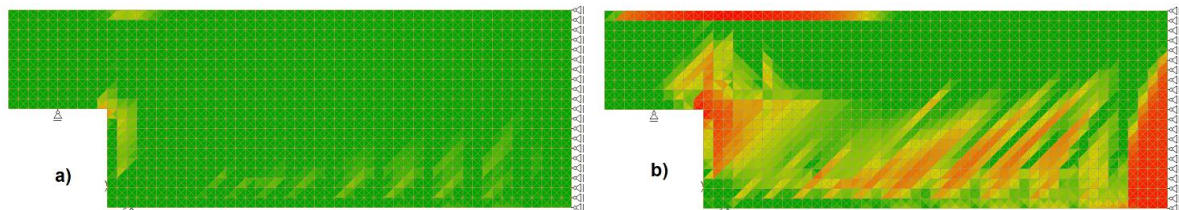


Figura 81 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0.75$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$ .

### D. Modelo 3 ( $k_d = 1$ )

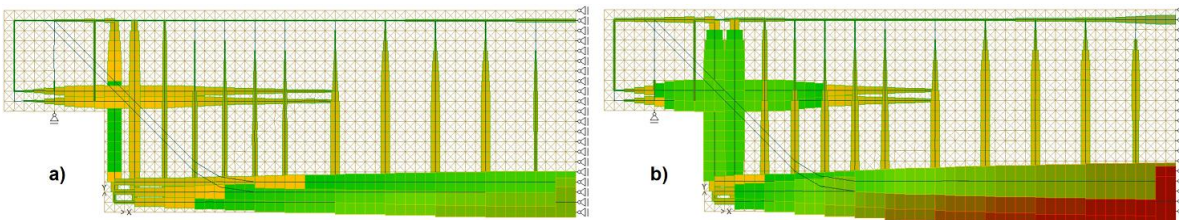


Figura 82 - Forças nas armaduras ( $k_d = 1.0$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$

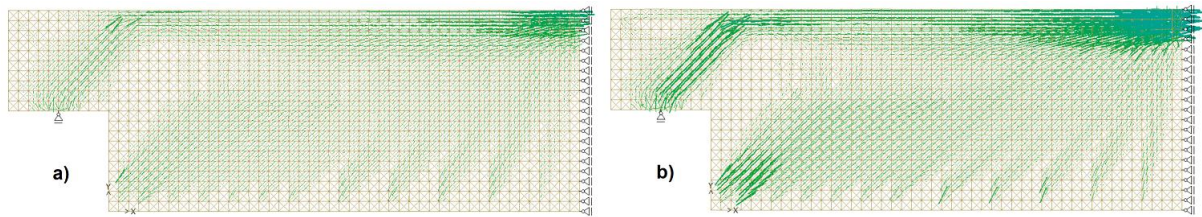


Figura 83 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 1.0$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b)  $q/q_d = 1.0$ .

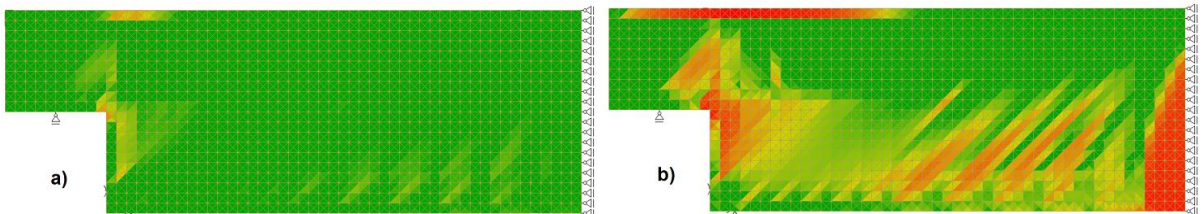


Figura 84 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 1.0$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$ .

## E. Modelo 4 ( $k_d = 0$ )

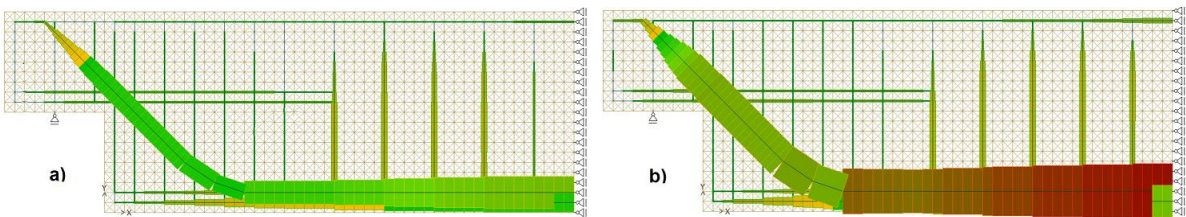


Figura 85 - Forças nas armaduras ( $k_d = 0$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$

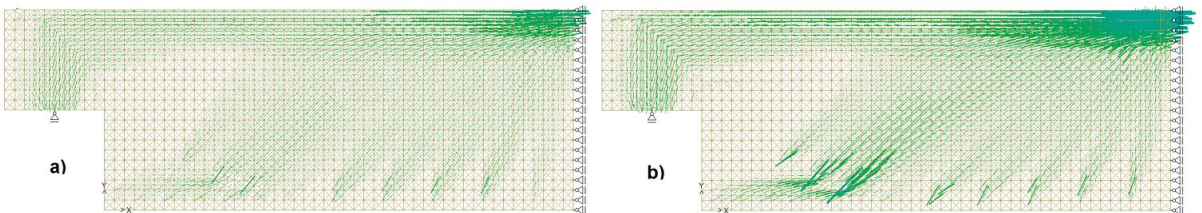


Figura 86 - Tensões atuantes no betão ( $k_d = 0$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b)  $q/q_d = 1.0$ .

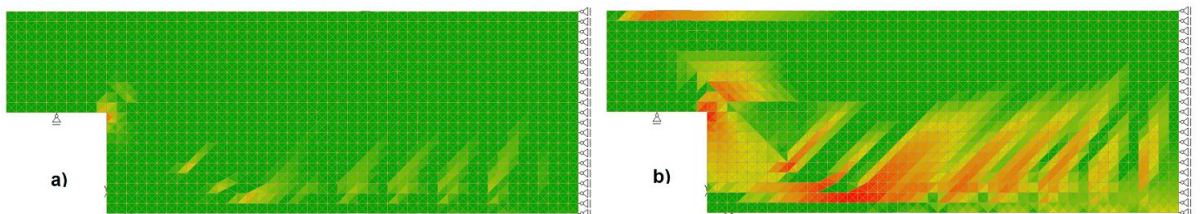


Figura 87 - Redução da resistência do betão ( $k_d = 0$ ): a) em  $q/q_d = 0.6$ ; b) em  $q/q_d = 1.0$ .